
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2023

ΜΑΘΗΜΑ

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΩΡΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ

11:30



φροντιστήρια
πουκαμισάς

Ο ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΜΙΛΟΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

φροντιστήρια
ΠΟΥΚΑΜΙΣΑΣ



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

- A.1. Θεωρία, σχ. βιβλίο σελ. 111
A.2. Θεωρία, σχ. βιβλίο σελ. 104
A.3. Θεωρία, σχ. βιβλίο σελ. 128
A.4. α. Λ β. Λ γ. Λ δ. Σ ε. Σ

φροντιστήρια
ΠΟΥΚΑΜΙΣΟΣ



ΘΕΜΑ Β

$$g(x) = \frac{4 - e^{2x}}{e^x}, D_g = \mathbb{R} \text{ και } h(x) = \ln x, D_h = (0, +\infty)$$

B.1. $D_f = D_{g \circ h} = \left\{ \begin{array}{l} x \in D_h \\ h(x) \in D_g \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ \ln x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} = (0, +\infty)$

$$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = \frac{4 - e^{2 \ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - e^{\ln x^2}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - x^2}{x}, x > 0$$

Άρα $f(x) = \frac{4 - x^2}{x}, x > 0$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

B.2. i) $f'(x) = \left(\frac{4 - x^2}{x} \right)' = \frac{-2x \cdot x - (4 - x^2)}{x^2} = \frac{-2x^2 - 4 + x^2}{x^2} = \frac{-(x^2 + 4)}{x^2} < 0$ στο $(0, +\infty)$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

ii) $\frac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \frac{\pi^{4 - e^2 < 0}}{e} \Leftrightarrow \frac{4 - \pi^2}{\pi} < \frac{4 - e^2}{e} \Leftrightarrow f(\pi) < f(e) \Leftrightarrow \pi > e$ που ισχύει

B.3. Η f είναι συνεχής στο $D_f = (0, +\infty)$ ως ρητή

Κατακόρυφη ασύμπτωτη

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(4 - x^2) \frac{1}{x} \right] = +\infty \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} (4 - x^2) = 4 > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0, x > 0 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Επομένως η $x = 0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

Πλάγια ασύμπτωτη

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - x^2}{\frac{x}{1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1 = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-1)x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4 - x^2}{x^2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - x^2 + x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0 = \beta$$

Επομένως η ευθεία $\varepsilon: y = -x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

$$\text{B.4. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{\frac{4-x^2}{x^2}}$$

$$\left| \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{\frac{4-x^2}{x^2}} \right| = \frac{|\sigma\upsilon\nu(1+x^2)|}{\left| \frac{4-x^2}{x^2} \right|} \leq \frac{1}{\left| \frac{4-x^2}{x^2} \right|} = \frac{x}{-4+x^2} \text{ αφού } x \rightarrow +\infty$$

$$-\frac{x}{-4+x^2} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} \leq \frac{x}{-4+x^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{-4+x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x}{-4+x^2} \right) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{κριτήριο} \\ \Rightarrow \\ \text{παρεμβολής } x \rightarrow +\infty \end{array} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

$$\begin{aligned} \Gamma.1. \int_2^3 x \cdot f(x) dx = 1 &\Leftrightarrow \int_2^3 x \left(\frac{1}{x} + \alpha \right) dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 (1 + \alpha x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 \left(x + \frac{\alpha x^2}{2} \right) dx = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[x + \frac{\alpha x^2}{2} \right]_2^3 = 1 \Leftrightarrow 3 + \frac{9\alpha}{2} - (2 + 2\alpha) = 1 \Leftrightarrow \cancel{3} + \frac{9\alpha}{2} - \cancel{2} - 2\alpha = \cancel{1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 9\alpha - 4\alpha = 0 \Leftrightarrow 5\alpha = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 0} \end{aligned}$$

$$\Gamma.2. \text{ Αφού } \alpha = 0 \text{ η συνάρτηση γίνεται } f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3, & x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases} \text{ με } A = D_f = (-\infty, +\infty)$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-2) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x-1)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\frac{1}{x} \right) = -1$$

Επομένως f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = -1$ άρα και f συνεχής στο $x_0 = 1$

Επομένως ορίζεται η εφαπτομένη στο 1.

ii) Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ έχει εξίσωση

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 2$$

$$\text{και } f'(1) = -1 = \varepsilon\varphi\omega \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = -\varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) \stackrel{\omega \in [0, \pi]}{\Leftrightarrow} \omega = \frac{3\pi}{4} \quad (135^\circ)$$

Γ.3. Για $x < 1$:

$$f'(x) = 2x - 3$$

$$x < 1 \Rightarrow 2x < 2 \Leftrightarrow 2x - 2 < 0 \Leftrightarrow 2x - 2 - 1 < -1 \Rightarrow f'(x) < -1 < 0$$

Άρα $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, 1)$ άρα $f \searrow$ στο $(-\infty, 1)$

Για $x > 1$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \text{ άρα } f'(x) < 0 \text{ άρα } f \searrow \text{ στο } (1, +\infty)$$

Και επειδή f συνεχής στο 1, έχουμε ότι f γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

Επομένως $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στο \mathbb{R}

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(A) = (0, +\infty)$$

Γ.4. Για $x \geq 1$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$

Άρα f κυρτή στο $[1, +\infty)$, επομένως $f(x) \geq g(x)$, όπου $g(x) = -x + 2$, $x \in \mathbb{R}$

Η f είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως ρητή

Η g είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως πολυωνυμική

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = -x + 2, \quad h(x) = 0 \quad (\acute{\alpha}\xi\omicron\nu\alpha\varsigma \ x'x)$$

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_1^2 (f(x) - g(x)) dx + \int_2^e f(x) dx = \\ &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + x - 2 \right) dx + \int_2^e \frac{1}{x} dx = \\ &= \left[\ln|x| + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^2 + \left[\ln|x| \right]_2^e = \\ &= \ln 2 + 2 - 4 - \frac{1}{2} + 2 + \ln e - \ln 2 = \\ &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \tau.μ. \end{aligned}$$

β' τρόπος

$$E = \int_1^e f(x) dx - \left(\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} \right) = \int_1^e f(x) dx - \frac{1}{2} |\hat{A}\hat{B}| |\hat{B}\hat{\Gamma}| = \int_1^e \left(\frac{1}{x} \right) dx - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \ln e - \ln 1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Θέμα Δ

Δ1. Έστω $g(x) = \frac{f(x) - 2x}{x-1}$, $x \neq 1$

Τότε $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = l \in \mathbb{R}$

$$f(x) - 2x = g(x)(x-1) \Leftrightarrow f(x) = g(x)(x-1) + 2x$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (g(x)(x-1) + 2x) = l \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2.$$

Όμως $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + k \right) =$

$$= \ln 1 - 1 + k = k - 1.$$

Άρα $k - 1 = 2 \Leftrightarrow \boxed{k = 3}$

Άρα $f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3$, $x \in (0, 2)$.

$$b_2. f'(x) = \frac{1}{2-x} \cdot (2-x)' + \frac{1}{x^2} =$$

$$= -\frac{1}{2-x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2} =$$

$$= \frac{x^2 + x - 2}{x^2(x-2)}, \quad x \in (0, 2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 2}{x^2(x-2)} = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -2 \text{ αποκρ.}$$

Οι ρίζες και το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς και

τα διαστήματα της μονοτονίας και τα σημεία
ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω

πίνακα :

x	$-\infty$	0	1	2
$f'(x)$	/	/	$+$	$-$
$f(x)$	/	/	2	/



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty^+} \left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3 \right) = -\infty.$$

γιατί $\lim_{x \rightarrow \infty^+} \ln(2-x) = \ln 2$ και $\lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{1}{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3 \right) = -\infty$$

γιατί $\lim_{x \rightarrow 2^-} \ln(2-x) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

• Διο διαστήματα $\Delta_1 = (0, 1]$ η $f(x)$ είναι
βωεχώς και \uparrow .

$$\text{Άρα } f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 2].$$

$0 \in f(\Delta_1)$. Άρα υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$ $f(x_1) = 0$.

Επειδή $f \uparrow$ στο Δ_1 , το x_1 είναι μοναδικό.

• Διο διαστήματα $\Delta_2 = [1, 2)$ η $f(x)$ είναι

βωεχώς και \downarrow

$$\text{Άρα } f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 2].$$

$0 \in f(\Delta_2)$. Άρα υπάρχει $x_2 \in (1, 2)$ $f(x_2) = 0$.

Επειδή $f \downarrow$ στο Δ_2 , το x_2 είναι μοναδικό.

Τελικά, υπάρχουν ακριβώς δύο x_1, x_2 $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$.

τα οποία είναι ρίζες της $f(x)$.

$$x_1 < 1 \Rightarrow -x_1 > -1 \Rightarrow$$

$$2-x_1 > 2-1 \Rightarrow 2-x_1 > 1 \Rightarrow \ln(2-x_1) > 0.$$

$$\text{Όλες } f(x_1) = 0 \Rightarrow \ln(2-x_1) - \frac{1}{x_1} + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x_1} = \ln(2-x_1) + 3 > 3 \text{ αφού } \ln(2-x_1) > 0$$

$\text{Άρα } x_1 < \frac{1}{3}$	$\text{β' τρόπος: } f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln \frac{5}{3} - \frac{1}{\frac{1}{3}} + 3 = \ln \frac{5}{3} > 0.$ $f(x_1) = 0 \text{ και } f \uparrow \text{ στο } \left[x_1, \frac{1}{3}\right]$ $\text{Άρα } x_1 < \frac{1}{3}.$
---------------------------------	--

Δ_3 . Η $f(x)$ είναι:

• συνεχής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$

• παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$.

Από το Θ.Μ.Τ, υπάρχει $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) \subseteq (0, 1)$:

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - \cancel{f(x_1)}}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

Επιπλέον η κλίση της f στο ξ είναι $2\sqrt{3}$

$M(\xi, f(\xi))$ είναι

$$\lambda_{\xi} = f'(\xi) = \frac{3f(\frac{1}{3})}{\xi} \quad \text{για } \xi \in (0, 2)$$

$f''(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3} < 0$. Άρα f' \downarrow , άρα το ξ κανονικό.
 Δ. 4. i) Αφού F, G παράγουσα της f έχουμε ότι

$$F'(x) = G'(x) = f(x), \quad x \in (0, 2)$$

Άρα υπάρχει $C \in \mathbb{R}$: $F(x) = G(x) + C$ ①

για $x = x_1$: ① $F(x_1) = G(x_1) + C \Rightarrow C = -G(x_1)$

για $x = x_2$: ① $F(x_2) = G(x_2) + C \Rightarrow C = F(x_2)$

$$-G(x_1) = F(x_2) \Rightarrow F(x_2) + G(x_1) = 0$$

Ορίζω (t) τη συνάρτηση G(t) :

$$H(x) = x_1 \cdot F(x) + x_2 \cdot G(x) - x_1 - x_2 + 2x, \\ x \in [x_1, x_2]$$

H H(A) είναι :

• G(x) είναι στο $[x_1, x_2]$ ως πράξεις G(x) αν.

• $H(x_1) \cdot H(x_2) < 0.$

γιατί :

$$H(x_1) = \cancel{\lambda_1 F(x_1)} + \lambda_2 G(x_1) - \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_1 =$$

$$= \lambda_2 G(x_1) + \lambda_1 - \lambda_2 < 0$$

$$H(x_2) = \lambda_1 F(x_2) + \cancel{\lambda_2 G(x_2)} - \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_2 =$$

$$= \lambda_1 F(x_2) - \lambda_1 + \lambda_2 =$$

$$= -\lambda_1 G(x_1) - \lambda_1 + \lambda_2 > 0$$

$$\text{yani: } f([x_1, x_2]) = [f(x_1), f(x_1)] \cup [f(x_2), f(x_1)] =$$

$$= [0, 2] \cup [0, 2] = [0, 2]$$

Apa $f(x) > 0$, ya'ni $\forall x \in (x_1, x_2)$.

0/0 $G'(x) = f(x) > 0$. Apa $G \uparrow$ $\forall [x_1, x_2]$

Apa $x_1 < x_2 \Rightarrow G(x_1) < G(x_2) = 0$.

Από το Θ. Bolzano, η εξίσωση $H(x) = 0$
έχει ρίζα χύβουον για πύα ορο (x_1, x_2) .

$$\text{Απόκα } H'(x) = \lambda_1 F'(x) + \lambda_2 G'(x) + 2 =$$

$$= \lambda_1 f'(x) + \lambda_2 f'(x) + 2 =$$

$$= (\lambda_1 + \lambda_2) f'(x) + 2 > 0, \text{ για } \lambda_1, \lambda_2 \in (x_1, x_2)$$

$$\text{Αρα } H(x) \uparrow \text{ στο } (x_1, x_2),$$

αρα η πύα κοναδύ.