
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2022

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

12:00

ΩΡΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ



φροντιστήρια
ΠΟΥΚΑΜΙΣΑΣ

Ο ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΜΙΛΟΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

ΘΕΜΑ Α

A₁. Σχολικό Βιβλίο Σελ.186

A₂. Σχολικό Βιβλίο Σελ.142

A₃. Σχολικό Βιβλίο Σελ.161

A₄. α) Σ

β) Σ

γ) Σ

δ) Λ

ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B₁ Ισχύει ότι $D_h = D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x \in [0, +\infty) : \sqrt{x} \in (-\infty, 1]\} = [0, 1]$

Ακόμα $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^4 - 2(\sqrt{x})^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

B₂ Έχουμε $h(x) = (x-1)^2, x \in [0, 1]$

$h'(x) = 2(x-1) < 0, x \in [0, 1)$ και η h συνεχής στο: $[0, 1]$

$h \searrow$ στο $[0, 1]$ άρα η h είναι 1-1

Ακόμα η h συνεχής στο $[0, 1]$ και $h \searrow$ άρα το σύνολο τιμών της h προκύπτει:

$$\left. \begin{array}{l} h(0) = 1 \\ h(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(D_h) = [0, 1] = D_{h^{-1}}$$

Έχουμε λοιπόν: $h(x) = y \Leftrightarrow (x-1)^2 = y \Leftrightarrow |x-1| = \sqrt{y} \Leftrightarrow -x+1 = \sqrt{y}$

$$\Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{y} \Leftrightarrow h^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y} \Leftrightarrow h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$$

Επομένως $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$ και $D_{h^{-1}} = [0, 1]$.

$$\mathbf{B_3} \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

i. Αρκεί να δείξουμε ότι η φ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $\varphi(0) \neq \varphi(1)$

Η φ είναι συνεχής στο $[0, 1)$ ως πράξεις συνεχών, επομένως αρκεί να δείξουμε ότι η φ είναι συνεχής στο 1, έχουμε λοιπόν:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2} = \varphi(1)$$

Επομένως η φ είναι συνεχής στο 1.

$$\text{Ακόμα } \left. \begin{array}{l} \varphi(0) = 1 \\ \varphi(1) = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi(0) \neq \varphi(1)$$

Τελικά ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών στο $[0,1]$ άρα

υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = \eta$ με $\eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

$$\text{ii. Έχουμε } \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \xrightarrow[\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)]{\eta\mu\alpha} \eta\mu\frac{\pi}{6} < \eta\mu\alpha < \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu\alpha < 1$$

Άρα από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$\varphi(x_0) = \eta\mu\alpha.$$

ΘΕΜΑ Γ

$$\text{Γ.1. } f'(x) = \begin{cases} -2 & , x < -1 \\ 3x^2 - 1 & , x > -1 \end{cases}$$

Από συνέπειες θεωρήματος μέσης τιμής έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + c_1 & , x < -1 \\ x^3 - x + c_2 & , x > -1 \end{cases} \text{ και επειδή η } f \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \text{ ισχύει:}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x + c_1 & , x < -1 \\ c_3 & , x = -1 \\ x^3 - x + c_2 & , x > -1 \end{cases}$$

Η f διέρχεται από την αρχή των αξόνων, συνεπώς $f(0) = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$

Η f είναι συνεχής στο -1 , συνεπώς $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow -2(-1) + c_1 = (-1)^3 - (-1) \Leftrightarrow c_1 + 2 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) = 0 = c_3$$

$$\text{Συνεπώς } f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & , x \leq -1 \\ x^3 - x & , x > -1 \end{cases}$$

Γ.2. Για $x > -1$, $f(x) = x^3 - x$

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $M(x_0, f(x_0))$ είναι: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \text{ συνεπώς } f'(x_0) = 3x_0^2 - 1$$

$$\text{Άρα } (\varepsilon): y - (x_0^3 - x_0) = (3x_0^2 - 1)(x - x_0) \Leftrightarrow y - x_0^3 + x_0 = (3x_0^2 - 1)(x - x_0)$$

Το $B(0, -2) \in (\varepsilon)$ άρα οι συντεταγμένες του, επαληθεύουν την εξίσωση (ε)

$$-2 - x_0^3 + x_0 = (3x_0^2 - 1)(0 - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 - x_0^3 + x_0 = -3x_0^3 + x_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x_0^3 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_0^3 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_0 = \sqrt[3]{1} \Leftrightarrow x_0 = 1$$

$$\text{Συνεπώς } (\varepsilon): y - 1^3 + 1 = (3 \cdot 1^2 - 1)(x - 1) \Leftrightarrow (\varepsilon): y = 2x - 2$$

Γ.3. Έστω $M(x(t), y(t))$ και η προβολή του στον άξονα $x'x$ είναι $K(x(t), 0)$

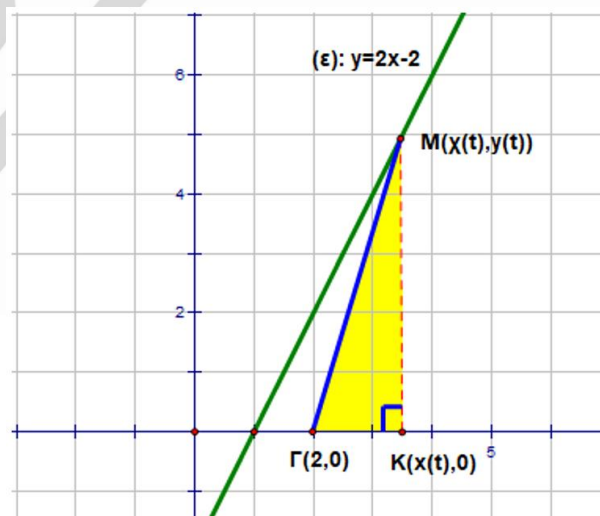
Το εμβαδόν του τριγώνου $\hat{M}K\Gamma$ είναι:

$$E_{\hat{M}K\Gamma} = \frac{1}{2}(x(t) - 2)(2x(t) - 2) = (x(t) - 2)(x(t) - 1) = x^2(t) - 3x(t) + 2$$

$$\text{Άρα } E(t) = x^2(t) - 3x(t) + 2 \text{ και } E'(t) = 2x(t) \cdot x'(t) - 3x'(t)$$

Την χρονική στιγμή $t = t_0$ έχουμε $x(t_0) = 3$ και $x'(t_0) = 2$

$$\text{Άρα } E'(t_0) = 2x(t_0) \cdot x'(t_0) - 3x'(t_0) = 2 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 6 \frac{\tau \cdot \mu}{\text{sec}}$$



Γ.4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} \right]$

$$\left| \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \right| = \frac{|\eta\mu f(x)|}{|f(x)|} \leq \frac{1}{|f(x)|} \quad \text{άρα} \quad \left| \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \right| \leq \frac{1}{|f(x)|}$$

Επομένως $-\frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \leq \frac{1}{|f(x)|}$

Για $x < -1$ ισχύει $f(x) = -2x - 2$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - 2) = +\infty \quad \text{άρα} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|f(x)|} = 0$$

Ομοίως $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{|f(x)|} \right] = 0$

Συνεπώς από κριτήριο παρεμβολής ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(-x)}{1-x^3} \stackrel{u=-x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow +\infty}} \frac{f(u)}{1-(-u)^3} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{1+u^3} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^3 - u}{1+u^3} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^3}{u^3} = 1$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} \right] = 0 + 1 = 1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. i) $f'(x) = 1 - \frac{1}{3x} \cdot 3 = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$			$-$	$+$
$f(x)$			\searrow	\nearrow
			.ΕΛ. (1, 1 - ln 3)	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Η f παρουσιάζει στο $x=1$ ελάχιστο το $f(1) = 1 - \ln 3 < 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln(3x)) = +\infty \quad \text{γιατί} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(3x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(3x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 - \frac{\ln(3x)}{x} \right) \right] = +\infty \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x)}{x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(3x)]'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3x} \cdot 3 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

- Στο διάστημα $(0,1]$ η $f(x)$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα.

$$\text{Άρα } f((0,1]) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [1 - \ln 3, +\infty) \text{ και } 0 \in f((0,1])$$

Άρα υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$

Επειδή f γνησίως φθίνουσα, το x_1 είναι μοναδικό.

- Στο διάστημα $[1, +\infty)$ η $f(x)$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα.

$$\text{Άρα } f([1, +\infty)) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [1 - \ln 3, +\infty) \text{ και } 0 \in f((0,1])$$

Άρα υπάρχει $x_2 \in (1, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$

Επειδή f γνησίως αύξουσα, το x_2 είναι μοναδικό.

Τελικά υπάρχουν ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης $f(x) = 0$ με $x_1 < 1 < x_2$

$$\text{ii) } f''(x) = \frac{(x-1)' \cdot x - (x-1) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{x - x + 1}{x^2} = \frac{1}{x^2} > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Άρα η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$

$$\underline{\Delta_2} \quad E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx$$

Για $x_1 \leq x \leq x_2$ ισχύει ότι $f \searrow$

$$\text{Άρα } f(x_1) \geq f(x) \Leftrightarrow f(x) \leq 0$$

Για $1 \leq x \leq x_2$ ισχύει ότι $f \nearrow$

$$\text{Άρα } f(x) \leq f(x_2) \Leftrightarrow f(x) \leq 0$$

Τελικά $f(x) \leq 0$, για κάθε $x \in [x_1, x_2]$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } E &= \int_{x_1}^{x_2} -f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} (\ln(3x) - x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \ln(3x) dx - \int_{x_1}^{x_2} x dx = \int_{x_1}^{x_2} (x)' \ln(3x) dx - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2} \\ &= \left[x \ln(3x) \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} (x) (\ln(3x))' dx - \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} \right) = x_2 \ln(3x_2) - x_1 \ln(3x_1) - \int_{x_2}^{x_1} x \frac{1}{3x} 3 dx - \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} \right) \end{aligned}$$

$$= x_2 \ln(3x_2) - x_1 \ln(3x_1) - \int_{x_1}^{x_2} 1 dx - \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} \right) = x_2 \ln(3x_2) - x_1 \ln(3x_1) - [x]_{x_1}^{x_2} - \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} \right).$$

Τα x_1, x_2 είναι ρίζες της f . Άρα

$$f(x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 - \ln(3x_1) = 0 \Leftrightarrow \ln(3x_1) = x_1$$

$$f(x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 - \ln(3x_2) = 0 \Leftrightarrow \ln(3x_2) = x_2$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } E &= x_2 x_2 - x_1 x_1 - (x_2 - x_1) - \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} \right) = x_2^2 - x_1^2 - x_2 + x_1 - \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^2}{2} \\ &= \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} - x_2 + x_1 = \frac{x_2^2 - x_1^2 - 2x_2 + 2x_1}{2} = \frac{(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) - 2(x_2 - x_1)}{2} = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2) \end{aligned}$$

Δ3. Από το Δ2 έχουμε ότι

$$E = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2) > 0 \text{ γιατί } x_2 - x_1 > 0$$

$$\text{Άρα } x_1 + x_2 > 2 \Leftrightarrow 2 - x_1 < x_2$$

$$x_1 < 1 \Leftrightarrow -x_1 > -1 \Leftrightarrow 2 - x_1 > 2 - 1 \Leftrightarrow 2 - x_1 > 1 \text{ και } f \text{ γνησίως αύξουσα στο } [1, +\infty), \text{ άρα}$$

$$f(2 - x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f(2 - x_1) < 0$$

Δ4.

$$2f(x) = (1 - \ln 3) + f'(x_2)(x - x_2)$$

Η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ έχει εξίσωση

$$e_1: y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = f'(x_2)(x - x_2)$$

Η f είναι κυρτή, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής $M(x_2, f(x_2))$

$$\text{Άρα } f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2) \quad (1) \text{ και το " = " ισχύει μόνο για } x = x_2$$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 1$

$$\text{Άρα } f(x) \geq 1 - \ln 3 \quad (2) \text{ και το " = " ισχύει μόνο για } x = 1 \text{ όμως: } x_2 > 1$$

Από (1) και (2) έχουμε με πρόσθεση κατά μέλη

$$2f(x) > (1 - \ln 3) + f'(x_2)(x - x_2)$$

για κάθε $x \in (0, +\infty)$ οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.