ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1. Σελίδα 111 σχολικού βιβλίου

Α2. Σελίδα 104 σχολικού βιβλίου

Α3. Σελίδα 74 σχολικού βιβλίου

Α4. α) Ψευδές

β) Αντιπαράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=x^{2\nu+1}$, σελίδα 61 σχολικού βιβλίου

Α5. α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Λάθος

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathrm{A}_f$ με

$$
\begin{aligned}
& f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \frac{3x_1+1}{x_1-3}=\frac{3x_2+1}{x_2-3} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow (3x_1+1)(x_2-3)=(3x_2+1)(x_1-3) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 3x_1x_2-9x_1+x_2-3=3x_1x_2-9x_2+x_1-3 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow -9x_1+x_2=-9x_2+x_1 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow -10x_1=-10x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2
\end{aligned}
$$

Άρα f "$1-1$" οπότε ορίζεται η f^{-1}

Β2.

$$
\begin{aligned}
f(x)=y \Leftrightarrow \frac{3x+1}{x-3}=y \Leftrightarrow 3x+1=yx-3y \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow 3x-yx=-1-3y \Leftrightarrow (3-y)\cdot x=-1-3y \quad (1)
\end{aligned}
$$

• Αν $y=3$ τότε η (1) γράφεται $0=-1$ Άτοπο

• Αν $y\neq 3$ τότε η (1) γράφεται $x=\dfrac{-1-3y}{3-y} \Leftrightarrow x=\dfrac{3y+1}{y-3}$ και $x\in \mathrm{A}_f$ άρα $x\neq 3$

Επομένως $\frac{3y+1}{y-3} \neq 3$

Αν $\frac{3y+1}{y-3} = 3 \Leftrightarrow 3y+1 = 3y-9 \Leftrightarrow 0y = -10$ αδύνατη

Άρα $\frac{3y+1}{y-3} \neq 3$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$

$$f^{-1}(y) = \frac{3y+1}{y-3},\ y \neq 3 \text{ ή } f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-3},\ x \neq 3$$

Αφού $A_f = A_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{3\}$ και $f(x) = f^{-1}(x)\quad \forall x \neq 3$

Επομένως $f = f^{-1}$

B3.

α' τρόπος

$$(f \circ f)(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = x \text{ για κάθε } x \in A_{f^{-1}} = A_f = \mathbb{R} - \{3\}$$

β' τρόπος

$$\begin{aligned} D_{f\circ f} &= \{x \in D_f \ /\ f(x) \in D_f\} = \\ &= \{x \neq 3 \ /\ f(x) \neq 3\} = \\ &= \left\{x \neq 3 \ /\ \frac{3x+1}{x-3} \neq 3\right\} = \\ &= \{x \neq 3 \ /\ 3x+1 \neq 3x-9\} = \mathbb{R} - \{3\} \end{aligned}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{3x+1}{x-3}\right) = \frac{3 \cdot \frac{3x+1}{x-3} + 1}{\frac{3x+1}{x-3} - 3} = \frac{\frac{9x+3+x-3}{\cancel{x-3}}}{\frac{3x+1-3x+9}{\cancel{x-3}}} = \frac{10x}{10} = x,\quad \forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

B4. $L = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} \left(f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right) = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} \left(\frac{3x+1}{x-3} \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right)$

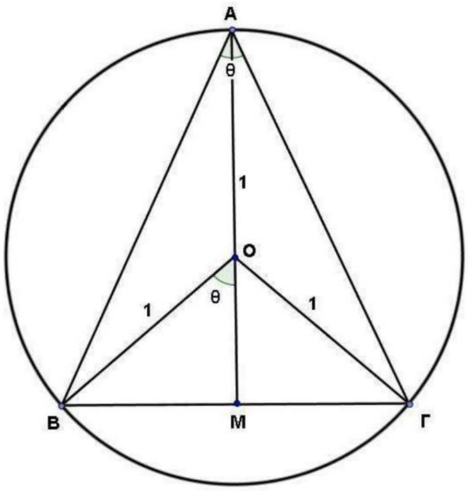
$$\left|\frac{3x+1}{x-3}\cdot \eta\mu\frac{1}{3x+1}\right| = \left|\frac{3x+1}{x-3}\right|\cdot\left|\eta\mu\frac{1}{3x+1}\right| \le \left|\frac{3x+1}{x-3}\right|\cdot 1 = \left|\frac{3x+1}{x-3}\right|$$

Άρα $-\left|\frac{3x+1}{x-3}\right| \le \frac{3x+1}{x-3}\cdot\eta\mu\frac{1}{3x+1} \le \left|\frac{3x+1}{x-3}\right|$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}}\left|\frac{3x+1}{x-3}\right| = \lim_{x\to -\frac{1}{3}}\left(-\left|\frac{3x+1}{x-3}\right|\right) = 0$$

Από το κριτήριο παρεμβολής $L=0$

ΘΕΜΑ Γ



Γ1. $(\mathrm{AB\Gamma}) = \mathrm{E}(\theta) = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{B\Gamma}\cdot\mathrm{AM}$

Έστω $\mathrm{OM}=x$ και $\mathrm{BM}=y$

$\eta\mu\theta = \frac{y}{1} \Leftrightarrow y = \eta\mu\theta$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{1} \Leftrightarrow x = \sigma\upsilon\nu\theta$

$\mathrm{B\Gamma} = 2y = 2\eta\mu\theta$

$\mathrm{AM} = \mathrm{AO}+\mathrm{OM} = 1+x = 1+\sigma\upsilon\nu\theta$

Άρα $\mathrm{E}(\theta) = \frac{1}{2}\cdot 2\eta\mu\theta\cdot(1+\sigma\upsilon\nu\theta) = \eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta),\quad \theta\in(0,\pi)$

Γ2.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}'(\theta) &= -\eta\mu\theta\cdot\eta\mu\theta + (1+\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = \\ &= -\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = \\ &= -\left(1-\sigma\upsilon\nu^2\theta\right) + \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = \\ &= -1+\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = \\ &= 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1\end{aligned}$$

$$\mathrm{E}'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1 = 0$$

$$\Delta = 1-4\cdot 2\cdot(-1) = 1+8 = 9$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{-1\pm 3}{4} = \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\theta = -1 \\ \sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$\sigma\upsilon\nu\theta = -1$ αδύνατη γιατί $\theta \in (0,\pi)$

$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

θ	$-\infty$	0		$\frac{\pi}{3}$		π	$+\infty$
$E'(\theta)$			+	0	−		
$E(\theta)$			↗		↘		

$E'(\theta) \neq 0$ για κάθε $\theta \in \left(0,\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$ και αφού η $E'(\theta)$ συνεχής, διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$.

$$E'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{6} + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} - 1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$$

Άρα $E'(\theta) > 0$ για κάθε $\theta \in \left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ αφού $\frac{\pi}{6} \in \left(0,\frac{\pi}{3}\right)$

$$E'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} - 1 = -1 < 0$$

Άρα $E'(\theta) < 0$ για κάθε $\theta \in \left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$ αφού $\frac{\pi}{2} \in \left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$

Η $E(\theta)$ μεγιστοποιείται όταν $\theta = \frac{\pi}{3}$ (Το τρίγωνο είναι ισόπλευρο)

Γ3.

$$\lim_{\theta \to 0^+} \mathrm{E}(\theta) = \lim_{\theta \to 0^+} \left[(1+\sigma\upsilon\nu\theta) \cdot \eta\mu\theta \right] = 0$$

$$\lim_{\theta \to \pi^-} \mathrm{E}(\theta) = \lim_{\theta \to \pi^-} \left[(1+\sigma\upsilon\nu\theta) \cdot \eta\mu\theta \right] = 0$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(1+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\right) \cdot \eta\mu\frac{\pi}{3} = \left(1+\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \ \tau.\mu.$$

Στο διάστημα $\Delta_1 = \left(0, \frac{\pi}{3}\right]$ η $\mathrm{E}(\theta)$ είναι συνεχής και $\nearrow$

Άρα $\mathrm{E}\left(\left(0, \frac{\pi}{3}\right]\right) = \left(\lim_{\theta \to 0^+} \mathrm{E}(\theta), \mathrm{E}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$

$\frac{3}{4} \in \mathrm{E}\left(\left(0, \frac{\pi}{3}\right]\right)$ Άρα υπάρχει $\theta_1 \in \mathrm{E}\left(0, \frac{\pi}{3}\right]$: $\mathrm{E}(\theta_1) = \frac{3}{4}$

Επειδή $\mathrm{E}(\theta) \nearrow$, το θ_1 είναι μοναδικό.

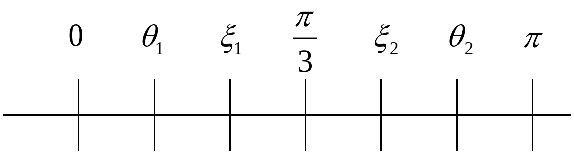
Στο διάστημα $\Delta_2 = \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ η $\mathrm{E}(\theta)$ είναι συνεχής και $\searrow$

Άρα $\mathrm{E}\left(\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)\right) = \left(\lim_{\theta \to \pi^-} \mathrm{E}(\theta), \mathrm{E}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$

$\frac{3}{4} \in \mathrm{E}\left(\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)\right)$ Άρα υπάρχει $\theta_2 \in \mathrm{E}\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)$: $\mathrm{E}(\theta_2) = \frac{3}{4}$

Επειδή $\mathrm{E}(\theta) \searrow$, το θ_2 είναι μοναδικό.

Γ4.



Η $\mathrm{E}(\theta)$ είναι:

- συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\theta_1, \frac{\pi}{3}\right]$ και $\left[\frac{\pi}{3}, \theta_2\right]$
- παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $\left(\theta_1, \frac{\pi}{3}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{3}, \theta_2\right)$

Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1 \in \left(\theta_1, \frac{\pi}{3}\right) \subseteq (0, \pi)$:

$$\mathrm{E}'(\xi_1) = \frac{\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \mathrm{E}(\theta_1)}{\frac{\pi}{3} - \theta_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) \cdot \mathrm{E}'(\xi_1) = \mathrm{E}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \mathrm{E}(\theta_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) \cdot \mathrm{E}'(\xi_1) = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) \cdot \mathrm{E}'(\xi_1) = \frac{3\left(\sqrt{3} - 1\right)}{4}$$

Ομοίως από Θ.Μ.Τ. για την $\mathrm{E}(\theta)$ στο $\left[\frac{\pi}{3}, \theta_2\right]$ υπάρχει $\xi_2 \in \left(\frac{\pi}{3}, \theta_2\right) \subseteq (0, \pi)$:

$$\mathrm{E}'(\xi_2)=\frac{\mathrm{E}(\theta_2)-\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\theta_2-\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\theta_2-\frac{\pi}{3}\right)\cdot \mathrm{E}'(\xi_2)=\mathrm{E}(\theta_2)-\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{3}-\theta_2\right)\cdot \mathrm{E}'(\xi_2)=\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{3}\right)-\mathrm{E}(\theta_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{3}-\theta_2\right)\cdot \mathrm{E}'(\xi_2)=\frac{3\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$$

Άρα $\left(\frac{\pi}{3}-\theta_1\right)\cdot \mathrm{E}'(\xi_1)=\left(\frac{\pi}{3}-\theta_2\right)\cdot \mathrm{E}'(\xi_2)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{\lambda x}\cdot\lambda = \ln x+1-\frac{1}{x},\ \ x>0$

Παρατηρούμε ότι $f'(1)=\ln 1+1-1=0$

$$f''(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0 \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

Άρα $f'\nearrow$ στο $(0,+\infty)$, άρα το $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της f'.

- για $0<x<1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(1) \Leftrightarrow f'(x)<0$
- για $x>1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(1) \Leftrightarrow f'(x)>0$

x	$-\infty$ 0	0 1	1 $+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

Η $f(x)$ παρουσιάζει στο $x=1$ ελάχιστο το $f(1)=1\cdot\ln 1-\ln\lambda=-\ln\lambda$

Το σημείο του ακροτάτου είναι το $\mathrm{A}(1,-\ln\lambda)$

Το A ανήκει στην ευθεία $x=1$ γιατί $\lambda \in (0,+\infty) \Leftrightarrow \ln\lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -\ln\lambda \in \mathbb{R}$

Δ2. $x^x \ge \lambda x \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x^x \ge \ln(\lambda x) \Leftrightarrow x\ln x \ge \ln(\lambda x) \Leftrightarrow x\ln x - \ln(\lambda x) \ge 0 \Leftrightarrow$

$f(x) \ge 0 \Leftrightarrow \min f(x) \ge 0 \Leftrightarrow -\ln\lambda \ge 0 \Leftrightarrow \ln\lambda \le 0 \Leftrightarrow 0<\lambda\le 1$

Άρα $\lambda_{\max} = 1$

Δ3. Έστω $\mathrm{M}(x_0, g(x_0))$ τυχαίο σημείο της C_g

Η εφαπτομένη της C_g στο M είναι η:

$\varepsilon:\ y - g(x_0) = g'(x_0)\cdot(x-x_0)$

$g(x) = x^x = e^{x\cdot\ln x}$

$g'(x) = \left(e^{x\cdot\ln x}\right)' = e^{x\cdot\ln x}\cdot(x\cdot\ln x)' = x^x(\ln x+1)$

$\varepsilon:\ y - x_0^{x_0} = x_0^{x_0}\cdot(\ln x_0+1)\cdot(x-x_0)$

Για $x=0$ και $y=0$ έχουμε:

$$-x_0^{x_0} = x_0^{x_0}(\ln x_0+1)(-x_0)$$

$$-1 = (\ln x_0+1)(-x_0) \Leftrightarrow x_0\cdot\ln x_0 + x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x_0 + 1 - \frac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 \text{ Από το (Δ1).}$$

Άρα $\varepsilon:\ y-1 = 1\cdot(x-1) \Leftrightarrow \varepsilon:\ y = x$

Δ4.

i) $h(x) = \begin{cases} e^{x\ln x} & ,x>0 \\ 1 & ,x=0 \end{cases}$

- για $x>0$, $h(x) = e^{x\ln x}$ συνεχής ως σύνθεση συνεχών
- στο $x_0 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1 = f(0)$ γιατί:

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

Άρα h συνεχής στο $x_0=0$

Άρα h συνεχής στο $[0.+\infty)$

ii) ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$\varphi(x)=x^{2020}\left(3-2\int_1^2 g(t)\,dt\right)+(1-x)\int_0^1 h(1-t)\,dt,\quad x\in[0,1]$$

Η $\varphi(x)$ είναι:

• συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική

• $\varphi(0)=\int_0^1 h(1-t)\,dt$

Θέτουμε $u=1-t,\quad du=-dt$

Για $t=0,\ u=1$ και για $t=1,\ u=0$.

Άρα, $\varphi(0)=-\int_1^0 h(u)\,du=\int_0^1 h(u)\,du=\int_0^1 h(t)\,dt>0$ γιατί:

Η $h(t)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$,

$h(t)\geq 0$ στο $[0,1]$ και η $h(t)$ δεν είναι παντού 0 στο $[0,1]$.

$\varphi(1)=3-2\int_1^2 g(t)\,dt<0$ γιατί:

$g'(x)=x^x\cdot(\ln x+1)$

$$g''(x)=\left(x^x\right)'\cdot\left(\ln x+1\right)+x^x\cdot\left(\ln x+1\right)'=$$
$$=\left(e^{x\ln x}\right)'\cdot\left(\ln x+1\right)+x^x\cdot\frac{1}{x}=$$
$$=x^x\cdot\left(\ln x+1\right)\cdot\left(\ln x+1\right)+x^x\cdot\frac{1}{x}=$$
$$=x^x\left[\left(\ln x+1\right)^2+\frac{1}{x}\right]>0$$

Άρα η g στρέφει τα κοίλα άνω στο $(0,+\infty)$

Άρα η C_g βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Άρα από το Δ3, έχουμε ότι $g(x)\geq x$ και το “ = ” ισχύει μόνο για $x=1$.

Άρα

$$\int_1^2 g(x)dx>\int_1^2 xdx \Leftrightarrow \int_1^2 g(x)dx>\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 \Leftrightarrow \int_1^2 g(x)dx>\frac{2^2}{2}-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_1^2 g(x)dx>2-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \int_1^2 g(x)dx>\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2\int_1^2 g(x)dx>3 \Leftrightarrow 3-2\int_1^2 g(x)dx<0 \Leftrightarrow \varphi(1)<0$$

Συνεπώς $\varphi(0)\cdot\varphi(1)<0$

Από το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$