ΘΕΜΑ Α

Α1. β

Α2. γ

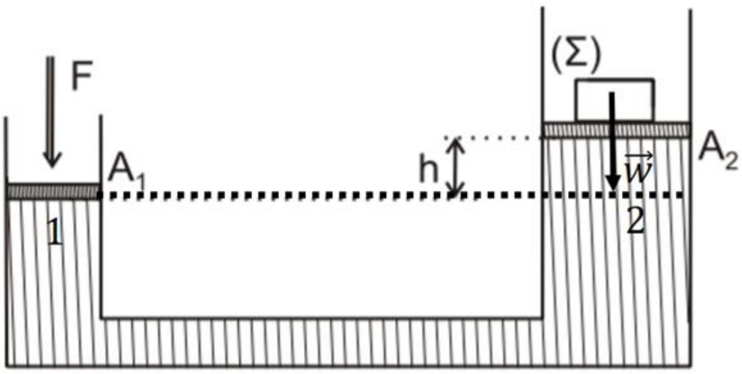
Α3. α

Α4. α

Α5. α – Σωστό
β – Λάθος
γ – Λάθος
δ – Λάθος
ε - Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.



α) Σωστή απάντηση είναι η (ii).

β) Το ρευστό εντός του υδραυλικού πιεστηρίου ισορροπεί οπότε η πίεση στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο είναι ίδια.
Οπότε η πίεση στο σημείο 1 είναι ίση με την πίεση στο σημείο 2.

$$P_1 = P_2 \Leftrightarrow P_{atm} + \frac{F}{A_1} = P_{atm} + \frac{W}{A_2} + \rho \cdot g \cdot h$$

Άρα απλοποιούμε την ατμοσφαιρική πίεση:

$$\frac{F}{A_1}=\frac{W}{A_2}+\rho\cdot g\cdot h \Leftrightarrow \frac{F}{A_1}=\frac{W+\rho\cdot g\cdot h\cdot A_2}{A_2}$$

Β2.
α) Σωστή απάντηση είναι η (ii).

β) Έχουμε συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο Σ από τα κύματα τα οποία το ένα διανύει την απόσταση (ΠΒΣ) και του δεύτερου που διανύει την απόσταση (ΠΑΣ). Όταν το μεταβλητό τμήμα μετακινηθεί κατά $x=x_1$ τότε παρουσιάζεται ενισχυτική συμβολή στο σημείο Σ.
Άρα

$$(\Pi B\Sigma)+2x_1-(\Pi A\Sigma)=\kappa\cdot\lambda$$

Όταν μεταβληθεί η απόσταση κατά 4cm τότε το σημείο Σ βρίσκεται στο αμέσως επόμενο σημείο απόσβεσης.
Άρα:

$$(\Pi B\Sigma)'-(\Pi A\Sigma)=(2\cdot\kappa'+1)\frac{\lambda}{2}$$

Επειδή είναι το αμέσως επόμενο σημείο απόσβεσης κ΄=κ.

$$(\Pi B\Sigma)'-(\Pi A\Sigma)=(2\cdot\kappa+1)\frac{\lambda}{2} \qquad (1)$$

Άρα επειδή

$$(\Pi B\Sigma)'=(\Pi B\Sigma)+2(x_1+4) \text{ σε cm } (2)$$

Τελικά η εξίσωση (1) λόγω της (2) :

$$(\Pi B\Sigma)+2(x_1+4)-(\Pi A\Sigma)=(2\cdot\kappa+1)\frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \kappa\cdot\lambda+8=(2\cdot\kappa+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{\lambda}{2}=8 \Leftrightarrow \lambda=16cm$$

Β3. α) Σωστή απάντηση είναι η (iii)

β)

Η κρούση των σωμάτων είναι Κεντρική και ελαστική.

Από το σύστημα εξισώσεων της Αρχής Διατήρησης της ορμής (ΑΔΟ) και της Αρχής Διατήρησης της Κινητικής Ενέργειας (ΑΔΚΕ) προκύπτουν οι τύποι:

$\upsilon_1{}'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1$ και $\upsilon_2{}'=\frac{2\,m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1$

Το ποσοστό της Κινητικής Ενέργειας της σφαίρας Σ_1 που μεταφέρθηκε στη σφαίρα Σ_2 ισούται με:

$\Pi_1\% = \frac{K_{1\alpha\rho\chi} - K_{1\tau\varepsilon\lambda}}{K_{1\alpha\rho\chi}} 100\%$ ή $\Pi_1\% = \frac{\frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 - \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1'^2}{\frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2} 100\%$ ή

$\Pi_1\% = \frac{\upsilon_1^2 - \upsilon_1'^2}{\upsilon_1^2} 100\%$ ή $\Pi_1\% = \frac{\upsilon_1^2 - \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} \upsilon_1^2}{\upsilon_1^2} 100\%$ ή $\Pi_1\% = (1 - \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2})100\%$ ή

$\Pi_1\% = \frac{(m_1 + m_2)^2 - (m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} 100\%$ ή $\Pi_1\% = \frac{m_1^2 + 2\, m_1\, m_2 + m_2^2 - m_1^2 + 2\, m_1\, m_2 - m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} 100\%$ ή

$\Pi_1\% = \frac{4\, m_1\, m_2}{(m_1 + m_2)^2} 100\%$ (1)

Ομοίως:

$\upsilon_2{}' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \upsilon_2$ και $\upsilon_1{}' = \frac{2\, m_2}{m_1 + m_2} \upsilon_2$

Το ποσοστό $\Pi_2\% = \frac{K_{2\alpha\rho\chi} - K_{2\tau\varepsilon\lambda}}{K_{2\alpha\rho\chi}} 100\%$ ή $\Pi_2\% = \frac{\frac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2 - \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2'^2}{\frac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2} 100\%$ ή

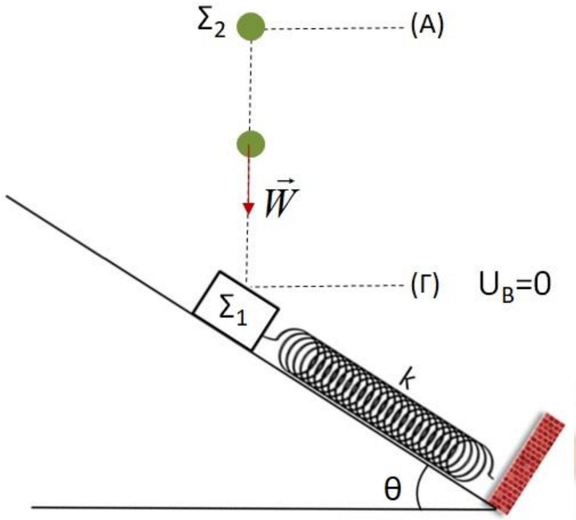
$\Pi_2\% = \frac{\upsilon_2^2 - \upsilon_2'^2}{\upsilon_2^2} 100\%$ ή $\Pi_2\% = \frac{\upsilon_2^2 - \frac{(m_2 - m_1)^2}{(m_1 + m_2)^2} \upsilon_2^2}{\upsilon_2^2} 100\%$ ή

$\Pi_2\% = \frac{(m_1 + m_2)^2 - (m_2 - m_1)^2}{(m_1 + m_2)^2} 100\%$ ή $\Pi_2\% = \frac{4\, m_1\, m_2}{(m_1 + m_2)^2} 100\%$ (2)

Δηλαδή $\Pi_1\% = \Pi_2\%$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

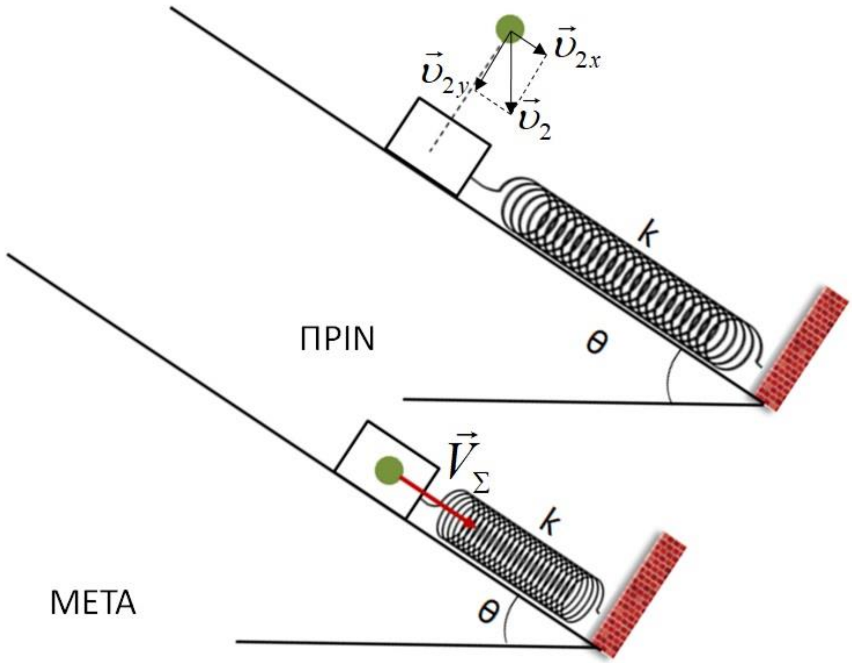


Για την κίνηση του Σ_2 από την αρχική θέση μέχρι την θέση της κρούσης ασκείται μόνο το βάρος του. Επομένως διατηρείται η μηχανική ενέργεια του συστήματος.
Εφαρμόζουμε Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας για την κίνηση αυτή.

$$E\alpha\rho\chi = E\tau\varepsilon\lambda \Leftrightarrow K\alpha\rho\chi + U\alpha\rho\chi = K\tau\varepsilon\lambda + U\tau\varepsilon\lambda$$

Αρχικά το σώμα δεν έχει κινητική ενέργεια (αφήνεται) και τελικά δεν έχει δυναμική ενέργεια (το ορίζουμε ως σημείο αναφοράς δυναμικής ενέργειας).

$$m_2 g \cdot h = \frac{1}{2} m_2 \cdot u_2{}^2 \Leftrightarrow u_2 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,6} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} m/s$$

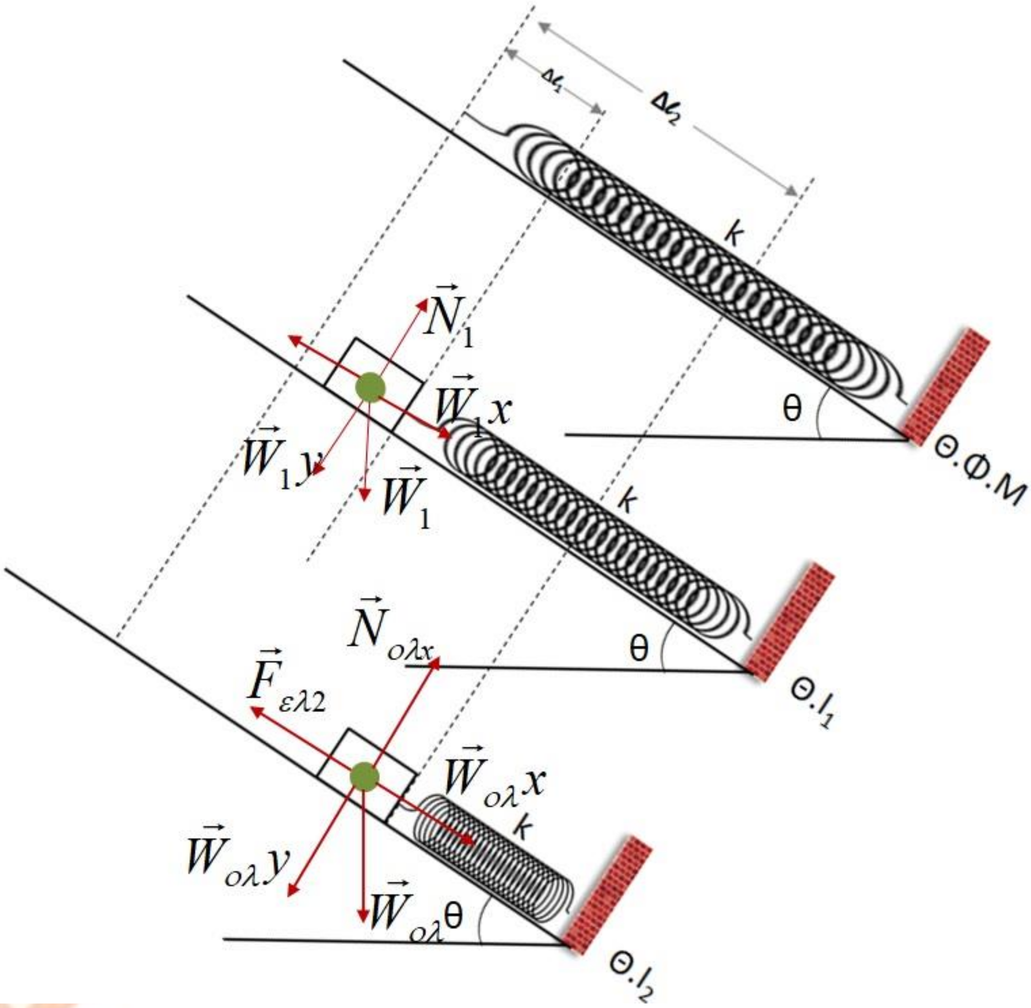


Η ορμή διατηρείται μόνο στον άξονα x΄x οπότε εφαρμόζουμε Αρχή Διατήρησης Ορμής κατά τον άξονα x΄x.

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi,\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda,\chi} \Leftrightarrow m_2 \cdot u_{2x} = \left(m_1 + m_2\right) u_\Sigma \Leftrightarrow u_\Sigma = \frac{m_2 \cdot u_{2x}}{m_1 + m_2}$$

$$u_\Sigma = \frac{m_2 \cdot u_{2x}}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \cdot u_2 \cdot \eta\mu\theta}{m_1 + m_2} = \frac{3 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}}{4} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{4} m/s$$

Γ2.



Πρώτα θα υπολογίσουμε την απόσταση της θέσης κρούσης με την νέα θέση ισορροπίας. Ξεκινάμε με την αρχική Θέση Ισορροπίας(Θ.Ι.1):

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow W_{1x} = F_{\varepsilon\lambda,1} \Leftrightarrow m_1 g \cdot \eta\mu\varphi = k \cdot \Delta l_1 \Leftrightarrow \Delta l_1 = \frac{m_1 g \cdot \eta\mu\varphi}{k}$$

$$\Delta l_1 = \frac{1 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}}{100} = \frac{1}{20} m$$

Για την νέα Θέση Ισορροπίας (Θ.Ι.2):

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow W_{o\lambda,x} = F_{\varepsilon\lambda,2} \Leftrightarrow (m_1 + m_2) g \cdot \eta\mu\varphi = k \cdot \Delta l_1 \Leftrightarrow \Delta l_2 = \frac{(m_1 + m_2) g \cdot \eta\mu\varphi}{k}$$

$$\Delta l_2 = \frac{4 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}}{100} = \frac{4}{20} m = 0,2m$$

Οπότε η απόσταση της θέσης κρούσης με την Θ.Ι.2 γύρω από την οποία πραγματοποιεί ταλάντωση είναι ίση με:

$$x = \Delta l_2 - \Delta l_1 = \frac{3}{20} m$$

Θα εφαρμόσουμε Αρχή Διατήρησης Ενέργειας Ταλάντωσης

$$E = K + U \Leftrightarrow \frac{1}{2} D \cdot A^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) u_\Sigma{}^2 + \frac{1}{2} D \cdot x^2$$

$$A = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2) u_\Sigma{}^2 + D \cdot x^2}{D}} = \sqrt{\frac{4 \cdot \frac{27}{16} + 100 \cdot \frac{9}{400}}{100}} = \sqrt{\frac{36}{400}} = 0,3m$$

Γ3.

Γνωρίζουμε ότι D=k:

$$D = k \Leftrightarrow k = (m_1 + m_2)\omega^2 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = \sqrt{25} = 5r/s$$

Την t=0s (αμέσως μετά την κρούση) βάση θετικής φοράς x=+0,15m με u<0:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_o)$$

$$0,15 = 0,3 \cdot \eta\mu(\varphi_o) \Leftrightarrow \eta\mu(\varphi_o) = \frac{1}{2} = \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\varphi_o = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\kappa=0} \varphi_o = \frac{\pi}{6} rad$$

ή

$$\varphi_o = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\kappa=0} \varphi_o = \frac{5\pi}{6} rad$$

Αρνητική τιμή ταχύτητας (συνφο<0) καλύπτεται από την δεύτερη τιμή της αρχικής φάσης.

Άρα $\varphi_o = \frac{5\pi}{6} rad$.

Οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x = 0,3 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{5\pi}{6}\right) \qquad \text{(S.I.)}$$

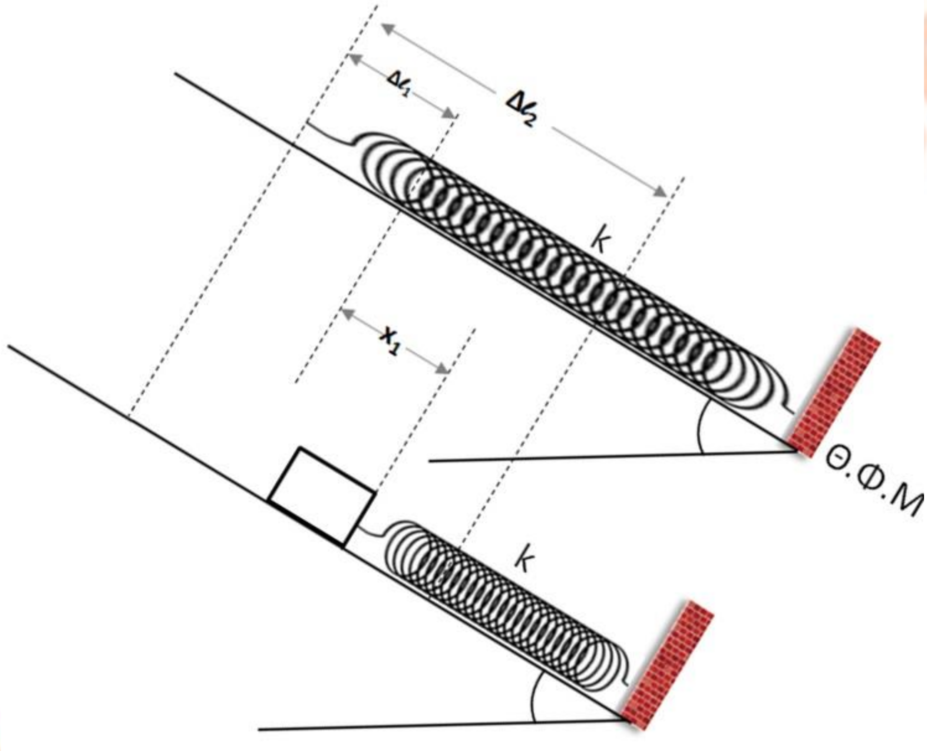
Γ4.

Από την Αρχή Διατήρησης Ενέργειας Ταλάντωσης έχουμε:

$$E = K + U \Leftrightarrow E = 8U + U \Leftrightarrow E = 9U \Leftrightarrow \frac{1}{2}DA^2 = 9\frac{1}{2}Dx^2$$

$$x = \pm\frac{A}{3} = \pm 0{,}1m$$

Το σώμα την χρονική στιγμή μηδέν ξεκινάει από το x=+0,15m και κινείται αρνητικά οπότε η δεύτερη φορά που θα ισχύει K=8U το συσσωμάτωμα θα διέρχεται από το x=+0,1m.

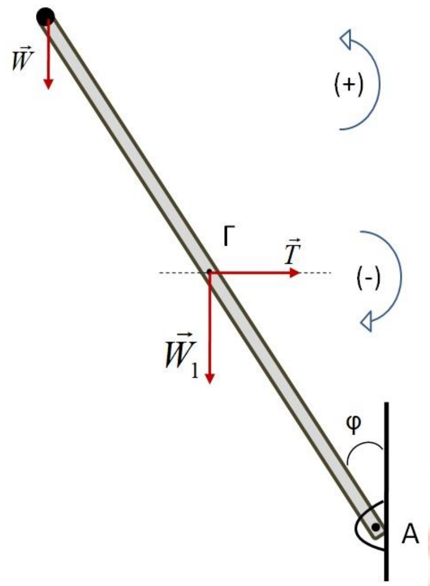


Οπότε ο ζητούμενος λόγος είναι ίσος με:

$$\frac{|F_{\varepsilon\lambda}|}{|F_{\varepsilon\pi}|} = \frac{k \cdot (\Delta l_2 + x_1)}{k \cdot x_1} = \frac{0{,}3}{0{,}1} = 3$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.



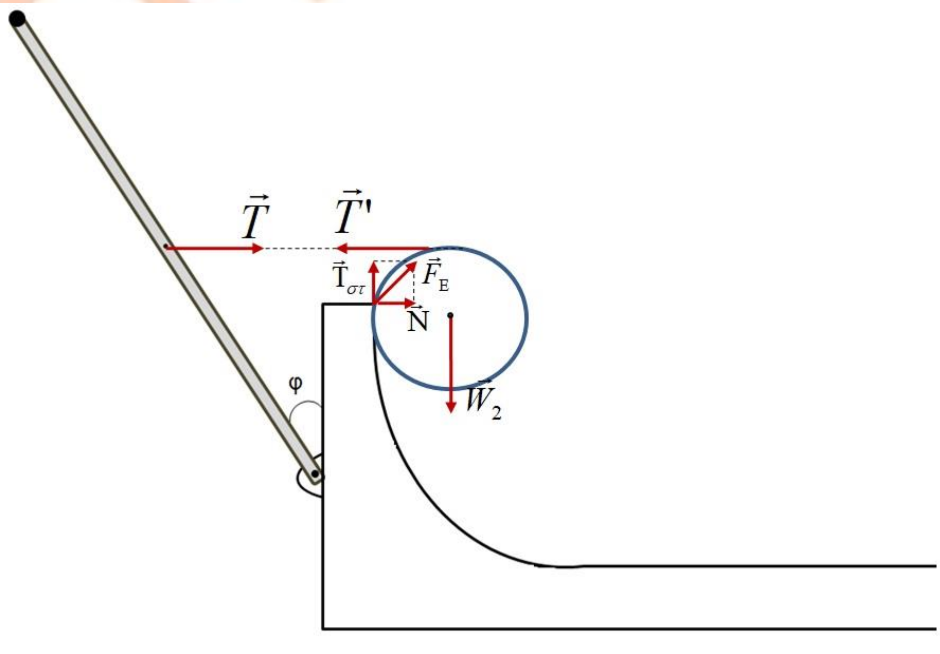
i) $\Sigma\vec{\tau}_{(A)} = 0$ ή $\vec{\tau}_w + \vec{\tau}_{w1} + \vec{\tau}_T = 0$ ή

$w \cdot L \cdot ημφ + w_1 \cdot \frac{L}{2} \cdot ημφ - T \cdot \frac{L}{2} \cdot συνφ = 0$

$10 \cdot 0{,}6 + 30 \cdot 0{,}6 = \frac{T}{2} \cdot 0{,}8$ ή

$T = 60$ N

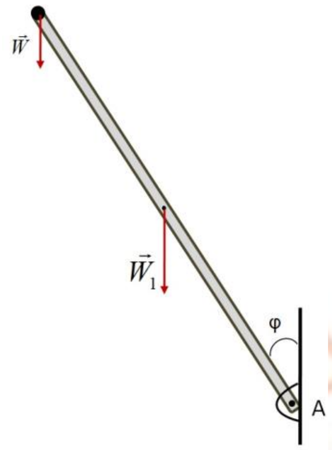
ii)



Από 3ο Νόμο Νεύτωνα και νήμα αβαρές $|\vec{T'}| = |\vec{T}|$ = 60 N

$\Sigma\vec{\tau}_{(E)}$ = 0 ή T΄· r – w_2 · r = 0 ή w_2 = T΄ ή m_2 ·g = 60 ή m_2 = 6 kg

Δ2.



Υπολογίζουμε την ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής του (σημείο Α):

$$I_A = I_{\rho\acute{\alpha}\beta\delta o\upsilon,\mathrm{A}} + I_{m,A} = \frac{1}{3}M_1L^2 + m\cdot L^2 = \frac{1}{3}\cdot 6\cdot 1^2 + 1\cdot 1^2 = 3Kg\cdot m^2$$

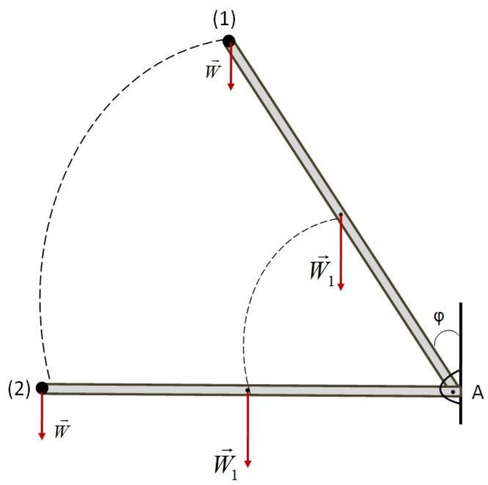
Εφαρμόζουμε Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης :

$$\Sigma\vec{\tau} = I_{\mathrm{A}}\cdot\vec{\alpha}_\gamma \Leftrightarrow \tau_{W_1} + \tau_{Wm} = I_{\mathrm{A}}\cdot\alpha_\gamma \Leftrightarrow W_1\cdot\frac{L}{2}\cdot\eta\mu\varphi + W_m\cdot L\cdot\eta\mu\varphi = I_{\mathrm{A}}\cdot\alpha_\gamma$$

$$\alpha_\gamma = \frac{M_1\cdot g\,\frac{L}{2}\cdot\eta\mu\varphi + m\cdot g\cdot L\cdot\eta\mu\varphi}{I_{\mathrm{A}}} = \frac{60\cdot\frac{1}{2}\cdot 0,6 + 10\cdot 1\cdot 0,6}{3} = 8rad/s^2$$

Δ3.

i)



$\Delta K = \Sigma W$ ή $K_2 - K_1 = W_w + W_{w1}$ ή

$\frac{1}{2} \cdot I_{(A)} \cdot \omega_2^2 - 0 = M \cdot g \cdot L \cdot$ συνφ $+ M_1 \cdot g \cdot$ συνφ $\frac{L}{2}$

$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \omega_2^2 = 10 \cdot 1 \cdot 0{,}8 + 60 \cdot 0{,}8 \cdot \frac{1}{2}$

$\omega_2 = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ rad/s

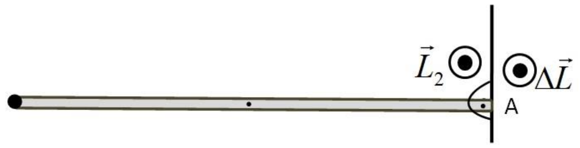
$|\Delta\vec{L}| = |\vec{L}_{τελ} - \vec{L}_{αρχ}|$

$|\Delta\vec{L}| = L_{τελ}$

$|\Delta\vec{L}| = I_{(A)} \cdot \omega_2$

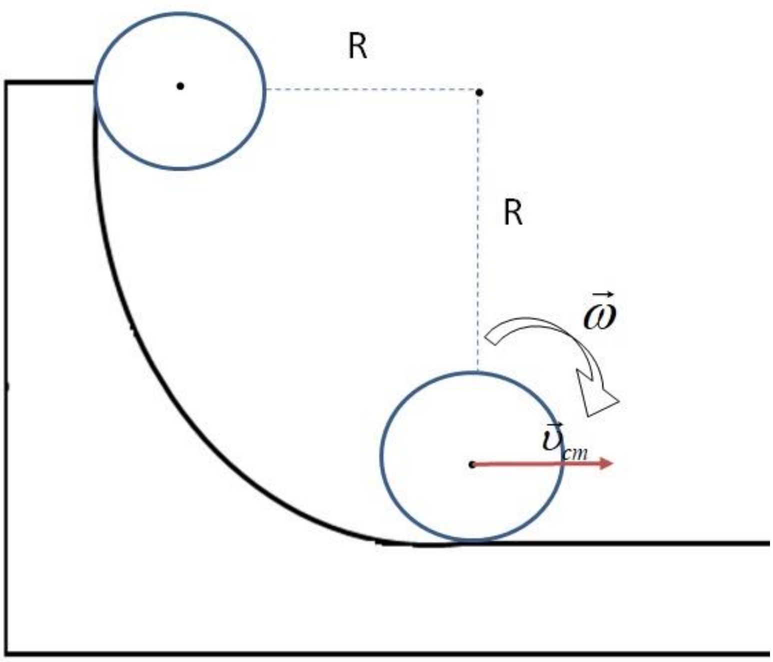
$|\Delta\vec{L}| = 8\sqrt{3}$ kg·m²/s

ii)



Κάθετη στο κατακόρυφο επίπεδο περιστροφής του στερεού με φορά αυτή του σχήματος.

Δ4.



Εφαρμόζουμε Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας μεταξύ της αρχικής του θέσης και του κατώτερου σημείου του τεταρτοκυκλίου (σημείο αναφοράς δυναμικής ενέργειας η θέση 1 του σχήματος δηλαδή η αρχική θέση του δίσκου).

$$E_{αρχ} = E_{τελ} \Leftrightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ}$$

$$0 = \frac{1}{2} I_{cm,δισκου}\omega^2 + \frac{1}{2} M_2 \upsilon_{cm}{}^2 - M_2 g\left(R-r\right) \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} M_2 \cdot r^2 \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} M_2 \upsilon_{cm}{}^2 - M_2 g\left(R-r\right)$$

$$\frac{1}{4} M_2 \cdot r^2 \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} M_2 \upsilon_{cm}{}^2 = M_2 g\left(R-r\right)$$

Επειδή ο δίσκος κάνει κύλιση χωρίς ολίσθηση $\upsilon_{cm} = \omega \cdot r$.

$$\frac{1}{4}\upsilon_{cm}{}^2 + \frac{1}{2}\upsilon_{cm}{}^2 = g\left(R-r\right) \Leftrightarrow \frac{3}{4}\upsilon_{cm}{}^2 = g\left(R-r\right) \Leftrightarrow \upsilon_{cm} = \sqrt{\frac{4g\left(R-r\right)}{3}}$$

$$\upsilon_{cm} = 6m/s$$

Δ5.

i) Κατά την κύλιση του το διάστημα που διανύει είναι ίσο με το μήκος του τόξου το οποίο έχει διαγράψει κάθε σημείο της περιφέρειας του δίσκου.

Η απόσταση που διανύει είναι ίση με το ¼ της περιφέρειας κύκλου ακτίνας R.
Άρα το πλήθος των περιστροφών που θα διαγράψει κατά την κίνηση είναι:

$$N = \frac{s}{2\pi r} = \frac{\frac{2\pi R}{4}}{2\pi r} = \frac{R}{2r} = \frac{2,8}{0,4} = 7 \text{ περιστροφές.}$$

ii) Το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα και γωνιακή ταχύτητα κατά μήκος του λείου οριζοντίου επιπέδου.

Οπότε για τον χρόνο κίνησης ισχύει $s = \upsilon_{cm}\cdot\Delta t \Leftrightarrow \Delta t = \frac{s}{\upsilon_{cm}} = \frac{\pi}{6}s$.

Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του δίσκου κατά την κίνηση αυτή είναι

$$\upsilon_{cm} = \omega \cdot r \Leftrightarrow \omega = \frac{\upsilon_{cm}}{r} = 60 rad/s$$

Για το πλήθος περιστροφών ισχύει:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{\omega\cdot\Delta t}{2\pi} = \frac{60\cdot\frac{\pi}{6}}{2\pi} = 5 \text{ περιστροφές.}$$