ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2019

ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΩΡΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ

12:20

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ:	*10/06/2019*
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:	***Μαθηματικά ΟΠ Θετικών Σπουδών & Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής***

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α) Εστω Α ένα υποσυνολο του $\mathbb{R}$.Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$

ΣΧΟΛΙΚΟ ΣΕΛ 15

β)

i. Μια συνάρτηση $f: A \to R$ αντιστρέφεται, αν και μόνο αν είναι $1-1$.

ii.Η αντίστροφη συνάρτηση της f που συμβολίζεται με f^{-1} ορίζεται από τη σχέση :

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

ΣΧΟΛΙΚΟ ΣΕΛ 35-36

Α2.

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$

Α3.

Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε $\quad f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

Α4.

α) ΛΑΘΟΣ

ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ

$$f(x) = \begin{cases} -1, x < 0 \\ 1, x > o \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι αν και f΄(x) = 0 για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ **εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο** $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

β) ΛΑΘΟΣ

ισχύει αν και μόνο αν η f συνεχής στο x_0 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Α5. γ)

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1.

Αφού η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την y=2

Θα έχουμε ότι

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - y \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \left(e^{-x} + \lambda - 2 \right) = 0 \Leftrightarrow \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

Αφού $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$

Β2.

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = f(x) - x, x \in [2,3]$

$g(x) = e^{-x} + 2 - x$

Η g συνεχής στο $[2,3]$ ως πράξεις συνεχών και

$g(2) = e^{-2} > 0$
$g(3) = -1 + e^{-3} < 0$

Αρα $g(2)\cdot g(3)<0$ από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλαχιστον ένα $x_0\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$

Είναι η g παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x)=\left(e^{-x}+2-x\right)'=-e^{-x}-1=-\left(e^{-x}+1\right)<0, x\in[2,3]$$

Αρα η g γνησίως φθίνουσα άρα 1-1 έπεται x_0 μοναδική ρίζα στο (2,3)

B3.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με

$f'(x)=\left(e^{-x}+2\right)'=-e^{-x}<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα 1-1 άρα υπάρχει η $f^{-1}(x)$

Είναι $f(D_f)=f(\mathbb{R})\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=(2,+\infty)$

Θέτουμε $y=f(x), x\in\mathbb{R}, y\in(2,+\infty)$

$$y=e^{-x}+2\Leftrightarrow e^{-x}=y-2\Leftrightarrow -x=\ln(y-2)\Leftrightarrow x=-\ln(y-2)$$

Είναι $f^{-1}(y)=-\ln(y-2)$ άρα

$$f^{-1}(x)=-\ln(x-2), x>2$$

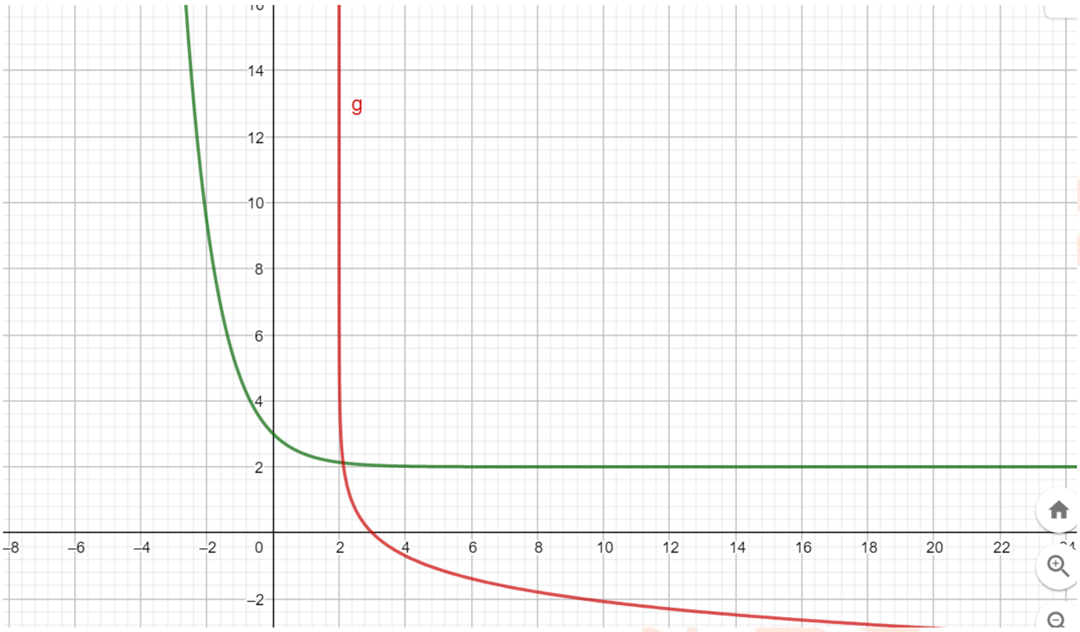
B4.

Για την κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$ εξετάζουμε στο $x=2$

$$\lim_{x\to2^+}f^{-1}(x)=\lim_{x\to2^+}\left[-\ln(x-2)\right]$$

Θέτουμε $u=x-2$ καθώς $x\to2^+, u\to0^+$ επομένως $\lim\limits_{x\to2^+}\left[-\ln(x-2)\right]=-\lim\limits_{u\to0^+}\ln u=+\infty$

Άρα η $x=2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$



Η γραφική παράσταση της f με f(x) = e^{-x} + 2 προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της καμπύλης της φ με φ(x) = e^{-x} κατά δύο μονάδες προς τα πάνω.

Η γραφική παράσταση της f^{-1} με $f^{-1}(x)$ = – ln(x – 2) προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της καμπύλης της h με h(x) = – lnx κατά δύο μονάδες προς τα δεξιά, όπου η καμπύλη της h είναι η συμμετρική της lnx ως προς τον άξονα x΄x.

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha, & x\ge 1 \\ e^{x-1}+\beta x, & x<1 \end{cases}$$

Γ1. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής. Άρα η f θα είναι συνεχής και στο x_0 = 1. Οπότε $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(x^2+\alpha\right)=1+\alpha=f(1)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(e^{x-1}+\beta x\right)=1+\beta$$

Άρα $1+\alpha=1+\beta \Leftrightarrow \boxed{\alpha=\beta}$

Επίσης η f θα είναι παραγωγίσιμη και στο x_0 = 1

Άρα $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\in R$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-\alpha}{x-1}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-\beta}{x-1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 1^-}\frac{\left(e^{x-1}+\beta x-1-\beta\right)'}{(x-1)'}=$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta}{1}=1+\beta$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+\alpha-1-\alpha}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$$

Άρα: $1+\beta=2\Leftrightarrow \boxed{\beta=1}$ και έτσι $\boxed{a=1}$

Γ2. $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\geq 1 \\ e^{x-1}+x, & x<1 \end{cases}$

Αν x < 1 τότε $f'(x)=e^{x-1}+1>0$, για κάθε x< 1

Αν x > 1 τότε $f'(x)=2x>0$ για κάθε x> 1

Η f συνεχής στο A_f = R άρα f γνησίως αύξουσα στο A_f = R

f(A) = $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x-1}+x)=-\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-1}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty$

Οπότε f(A) = R

Γ3. f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και συνεχής

$$f\left((-\infty,0]\right)=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x), f(0)\right]=\left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$$

Το $0\in\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$ άρα υπάρχει $x_0<0$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$ και είναι μοναδικό αφού $f \nearrow$ στο A_f .

Οπότε η f είναι 1 – 1

ΙΙ) Όπως αποδείξαμε $f(x_0)=0$ με $x_0<0$

Η εξίσωση (Ε) $f^2(x)-x_0 f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)\cdot\left[f(x)-x_0\right]=0$

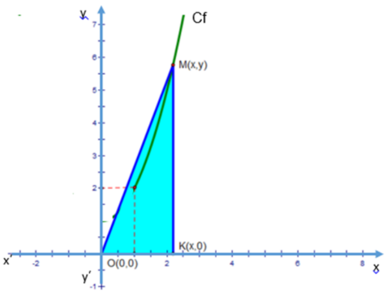
Θα δείξουμε ότι η (Ε) είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$

Αφού $f(x_0)=0$ και $f \nearrow$ στο R άρα για κάθε $x>x_0 \Leftrightarrow f(x)>f(x_0)=0$

$f(x)>0>x_0$ άρα $f(x)-x_0>0$, $f(x)\cdot\left[f(x)-x_0\right]>0$ για κάθε $x>x_0$

Άρα η (Ε) $f(x)\cdot\left[f(x)-x_0\right]=0$ είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$

Γ4.



Αν $x\geq 1 \Leftrightarrow f(x)=x^2+1$

(ΟΚΜ) = $\frac{1}{2}$(ΟΚ)(ΚΜ) = $\frac{1}{2}|x(t)||y(t)| = \frac{1}{2}x(t)[x^2(t)+1] = \frac{1}{2}[x^3(t)+x(t)]$

Αφού χ(t) ≥ 1 > 0 και y(t) > 0

Θεωρούμε την συνάρτηση Ε(t) = $\frac{1}{2}[x^3(t)+x(t)]$ με χ(t) ≥ 1

Ε΄(t) = $\frac{1}{2}[3x^2(t)x'(t)+x'(t)]$

Για t = t_0 όπου χ΄(t_0) = 2 και χ(t_0) = 3 έχουμε

Ε΄(t_o) = $\frac{1}{2}[3x^2(t_0)x'(t_o)+x'(t_0)] = \frac{1}{2}[3\cdot 3^2\cdot 2+2]$ = 28 τμ/sec

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.

$f(1)=1 \Leftrightarrow a+\beta=1$

$f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}+a$

$f'(1)=-1 \Leftrightarrow a=-1$

$a+\beta=1 \Leftrightarrow \beta=1-a=2$

Δ2.

$$f(x)=(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)-x+2\,,\ x\in R$$

$$f\,'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2(x-1)^2}{\left(x^2-2x+2\right)}-1\,,\ x\in R$$

$$E=\int_1^2 |\ f(x)-(-x+2)\ |\ dx=\int_1^2\left(\ f(x)+x-2\right)dx\,,\ \gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}:$$

$$f(x)+x-2=(x-1)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)=(x-1)\cdot\ln\left[(x-1)^2+1\right]>0$$

$\gamma\iota\alpha\quad \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\quad x>1.$

$$\acute{A}\rho\alpha\quad \mathrm{E}=\int_1^2\left[\left(x-1\right)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)\right]dx$$

$\theta\acute{\varepsilon}\tau o\upsilon\mu\varepsilon\quad u=x^2-2x+2, du=2(x-1)\quad \kappa\alpha\iota$

$u_1=1^2-2\cdot1+2=1, u_2=2^2-2^2+2=2.\quad o\pi\acute{o}\tau\varepsilon:$

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\int_1^2 \ln u du=\frac{1}{2}\int_1^2 (u)'\ln u du=\frac{1}{2}\left(\left[u\cdot\ln u\right]_1^2-\int_1^2 u\cdot(\ln u)'du\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\ln2-\int_1^2 1du\right)=\frac{1}{2}\left(2\ln2-1\right)=\ln2-\frac{1}{2}\tau\mu$$

Δ3.

(i)

$$f\,'(x)\geq-1\quad ,x\in R$$

$$\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1\geq-1\Leftrightarrow\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}\geq0$$

$\pi o\upsilon\quad \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in R, \gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}:$

$$\ln\left(x^2-2x+2\right)=\ln\left[\left(x-1\right)^2+1\right]\geq0\quad \kappa\alpha\iota\quad \frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}=\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}\geq0, x\in R.$$

(ii)

$$f(\lambda+\frac{1}{2})+\lambda\geq(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+2)+\frac{3}{2},\lambda\in R$$

$$\Leftrightarrow\ f(\lambda+\frac{1}{2})+\lambda\geq f(\lambda)+\lambda-2+\frac{3}{2},\lambda\in R\Leftrightarrow f(\lambda+\frac{1}{2})\geq f(\lambda)-\frac{1}{2},\lambda\in R$$

$$\Leftrightarrow\ f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)\geq-\frac{1}{2}.\quad \Gamma\iota\alpha\quad \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\quad \lambda\in R,\lambda<\lambda+\frac{1}{2}.$$

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\lambda, \lambda+\frac{1}{2}]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα $(\lambda, \lambda+\frac{1}{2})$,

Από Θ.Μ.Τ. θα υπάρχει $\xi \in(\lambda, \lambda+\frac{1}{2})$, τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)}{(\lambda+\frac{1}{2})-\lambda}=\frac{f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}$$

Από Δ3(i) έχουμε ότι : $f'(x)\geq -1$ για κάθε $x\in R$ άρα θα είναι και $f'(\xi)\geq -1$

$$\Leftrightarrow \frac{f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}\geq -1 \Leftrightarrow f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)\geq -\frac{1}{2}$$

Δ4.

Έστω Κ(α,f(α)) τυχαίο σημείο της C_f και Λ(β,g(β)) τυχαίο σημείο της C_g

$g'(x)=-3x^2-1, x\in R$

Πρέπει $f'(\alpha)=g'(\beta)\Leftrightarrow \ln(a^2-2a+2)+\frac{2(a-1)^2}{a^2-2a+2}-1=-3\beta^2-1$

$\Leftrightarrow \ln(a^2-2a+2)+\frac{2(a-1)^2}{a^2-2a+2}=-3\beta^2$ σχέση(1)

Επειδή $\ln(a^2-2a+2)+\frac{2(a-1)^2}{a^2-2a+2}\geq 0$ και $-3\beta^2\leq 0$, η (1) ισχύει

μόνο όταν $\alpha=1$ και $\beta=0$

οπότε η εφαπτομένη της C_f στο Κ θα είναι η $(\varepsilon_1): y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$

$\Leftrightarrow y-1=-(x-1)\Leftrightarrow y=-x+2$

και η εφαπτομένη της C_g στο Λ θα είναι: $y-g(\beta)=g'(\beta)(x-\beta)$

$\Leftrightarrow y-g(0)=g'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=-x+2$

Άρα η y=-x+2 είναι η μοναδική κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g .

Συμπληρωματικοί τρόποι επίλυσης

Θέμα Γ

Γ4. (β τρόπος)

Εξ υποθέσεως ισχύει $\frac{dx}{dt} = 2\mu/sec$

Ζητάμε το $\left.\frac{dE}{dt}\right|_{x=3}$

$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

Ε = $\frac{1}{2}$(ΟΚ)(ΚΜ) = $\frac{1}{2}|x| \cdot |x^2+1| = \frac{1}{2}x(x^2+1) = \frac{1}{2}(x^3+x)$ αφού χ $\geq 1 > 0$

Άρα $\frac{dE}{dx} = \frac{1}{2}(3x^2+1)$

Άρα $\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}(3x^2+1) \cdot 2 = 3x^2 + 1$

$\left.\frac{dE}{dt}\right|_{x=3} = 3 \cdot 3^2 + 1 = 28$ τμ/sec

Θέμα Δ

Δ4. (β τρόπος) Δείξαμε ότι f΄(χ) ≥ -1 για κάθε χ $\in R$

g(x) = – x^3 – x + 2 , χ $\in R$ g΄(χ) = – 3χ^2 – 1 , χ $\in R$

άρα g΄(χ) $\leq$ – 1 για κάθε χ $\in R$

Έστω $M_1(x_1, f(x_1))$, $M_2(x_2, g(x_2))$ τα σημεία επαφής της ζητούμενης κοινής εφαπτομένης τότε θα ισχύει $f΄(x_1) = g΄(x_2)$

Αλλά $f΄(x_1) \geq -1$ και $g΄(x_2) \leq -1$

Άρα η ισότητα θα ισχύει αν και μόνο αν $f΄(x_1) = -1$ και $g΄(x_2) = -1$

f΄(χ) > – 1 για κάθε χ$\in R - \{1\}$

g΄(χ) < – 1 για κάθε χ$\in R^*$

Άρα $x_1 = 1$ και $x_2 = 0$ (Άρα $x_1 \neq x_2$)

Για $x_1 = 1$ έχουμε ε_1 : y – f(1) = f΄(1)(x – 1) ⇔ y – 1 = – (x – 1) ⇔ y = – x + 2

Αντίστοιχα για $x_2 = 0$ ε_2 : y – g(0) = g΄(0)(χ – 0) ⇔ y – 2 = – 1x ⇔ y = – x + 2

Άρα $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2$