ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

# ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ 2018

ΜΑΘΗΜΑ

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΠ- Γ΄ΓΕΛ

ΩΡΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ

12:50

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

| | |
|---|---|
| ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: | *11 / 06 / 2018* |
| ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: | ***Μαθηματικά ΟΠ Γ ΓΕΛ*** |

**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ**

## ΘΕΜΑ Α

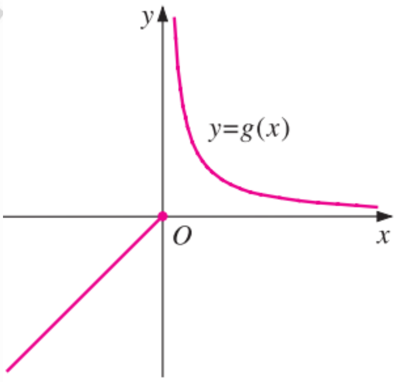
Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 99

Α2. Α Ψ

Β. Σχολικό βιβλίο Σελ 35

Για παράδειγμα η συνάρτηση

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$$ είναι ‘1-1’ αλλά δεν είναι




γνήσια μονότονη όπως φαίνεται και στο σχήμα.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ 216

Α4. α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε)Σ

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** Είναι $f(x)=x-\dfrac{4}{x^2}, x\in\mathbb{R}-\{0\}$

Η f συνεχής στο $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$ ως πράξεις συνεχών .

Η συνάρτηση f παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\left(x-\frac{4}{x^2}\right)'=1+\frac{8}{x^3}=\frac{x^3+8}{x^3}\ ,\ x\in\mathbb{R}-\{0\}$$

Το πρόσημο της $f'$ είναι με βάση το παρακάτω πίνακα

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $x^3+8$ | - | ○ + | + | |
| $x^3$ | - | - | ○ + | |
| $x^3\cdot\left(x^3+8\right)$ | + | - | + | |

Άρα το πρόσημο της $f'$ και η μονοτονία της $f$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

| x | -∞ | -2 | 0 | +∞ |
|---|---|---|---|---|
| f′ | + | − | + | |
| f | ↗ | ↘ | ↗ | |
| | | T.M | | |

Άρα η $f$ είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-2]$ και $(0,+\infty)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2,0)$

Στην θέση $x_0=-2$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-2)=-3$

**B2.** Η $f'(x)$ παραγωγίσιμη ως ρητή με $f''(x)=\left(1+\dfrac{8}{x^3}\right)'=\dfrac{-24}{x^4}$

Είναι για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ $f''(x)<0$

άρα η $f$ είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$

**B3.** Κατακόρυφη ασύμπτωτη θα αναζητήσουμε στο $x=0$

Επομένως

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3-4}{x^2} = \lim_{x\to 0^+}\left[\left(x^3-4\right)\cdot\frac{1}{x^2}\right] = (-4)\cdot(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3-4}{x^2} = \lim_{x\to 0^-}\left[\left(x^3-4\right)\cdot\frac{1}{x^2}\right] = (-4)\cdot(+\infty) = -\infty$$

Άρα η ευθεία $x=0$ (ο άξονας $y'y$ ) κατακόρυφη ασύμπτωτη της $f$ .

Πλάγιες –Οριζόντιες θα αναζητήσουμε στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Για να είναι η $y=\lambda x+\beta, \lambda, \beta\in\mathbb{R}$ ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$ ) αρκεί τα όρια $\lambda = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\beta = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]$ να είναι πραγματικοί αριθμοί (αντιστοίχως $\lambda = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\beta = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3-4}{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-4}{x^3}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-4}{x^2}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-4-x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{x^2} = 0$$

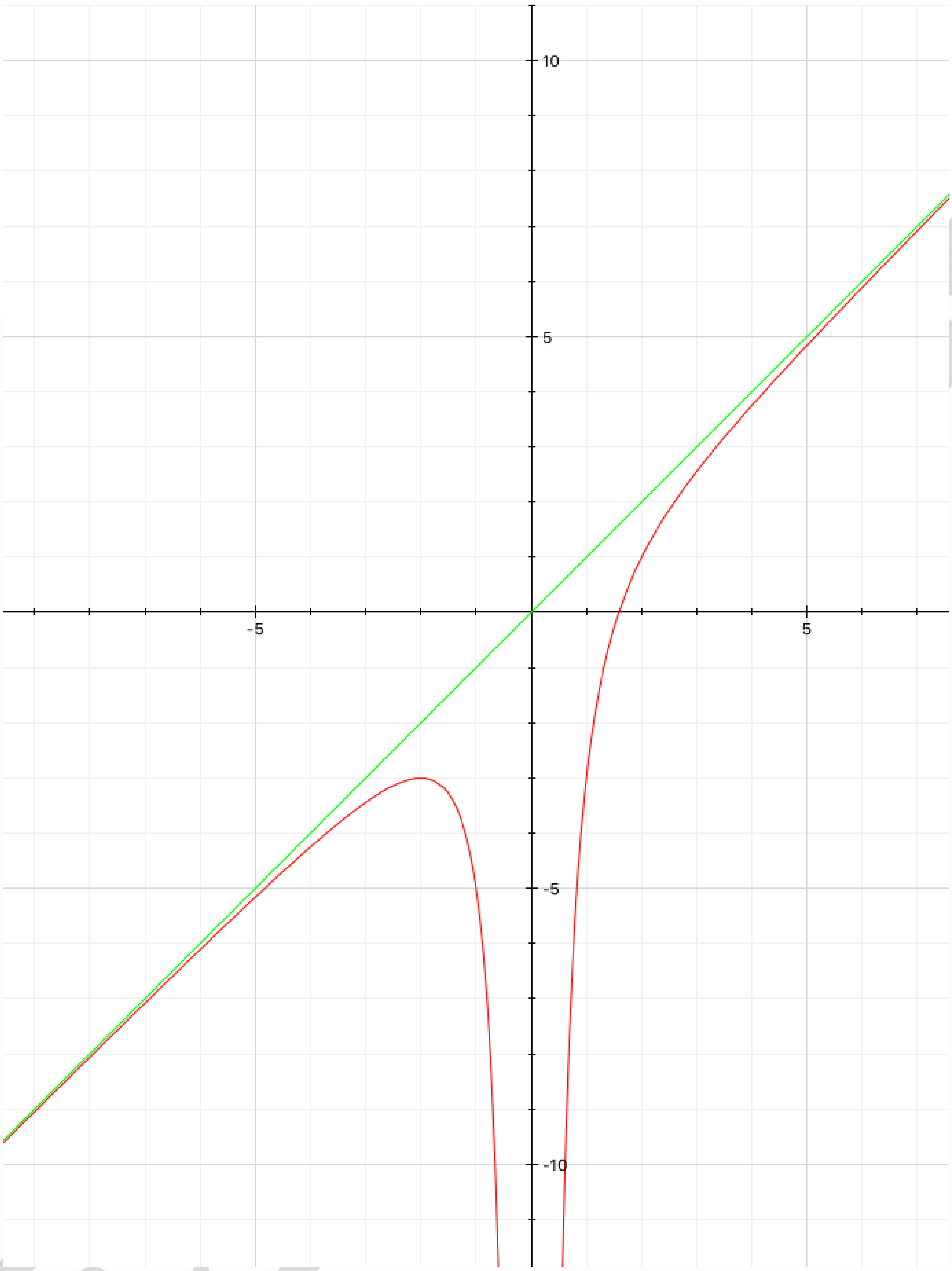
Άρα η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της $f$ στο $+\infty$

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3-4}{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-4}{x^3}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3} = 1$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-x = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-4}{x^2}-x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4-x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-4}{x^2} = 0$$

Άρα η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της $f$ στο $-\infty$

**B4.** Με βάση τα παραπάνω ερωτήματα η γραφική παράσταση της $f$ είναι η παρακάτω :




$f(x)=0 \Leftrightarrow x-\dfrac{4}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{4}$ επομένως τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $A\left(\sqrt[3]{4},0\right)$

## ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η περίμετρος του τετραγώνου είναι x m, οπότε η πλευρά του θα είναι $\frac{x}{4}$.

Το x παριστάνει μήκος είναι $x>0$ αλλά και $x<8$ που είναι το συνολικά μήκος του σύρματος, άρα $0<x<8$. Επομένως το εμβαδον του τετραγώνου είναι $E(x)=\frac{x^2}{16}$. Με το υπόλοιπο του σύρματος το οποίο είναι $8-x$ κατασκευάζουμε τον κύκλο που έχει μήκος:

$$L=2\pi\rho \Leftrightarrow 8-x=2\pi\rho \Leftrightarrow \rho=\frac{8-x}{2\pi}\,m$$

Οπότε ο κύκλος έχει εμβαδόν:

$$E=\pi\rho^2=\pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2=\pi\frac{(8-x)^2}{4\pi^2}=\frac{(8-x)^2}{4\pi}$$

Το άθροισμα των εμβαδών είναι:

$$E(x)=\frac{x^2}{16}+\frac{(8-x)^2}{4\pi}=\frac{\pi x^2+4(8-x)^2}{16\pi}=\frac{\pi x^2+4(64-16x+x^2)}{16\pi}$$
$$=\frac{\pi x^2+256-64x+4x^2}{16\pi}=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi},\ x\in(0,8)$$

Γ2. Η $E$ είναι παραγωγίσιμη με $E'(x)=\frac{1}{16\pi}\left(2(\pi+4)x-64\right)=\frac{1}{8\pi}\left((\pi+4)x-32\right)$ με $x\in(0,8)$

Είναι $E'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{32}{4+\pi}$ και είναι, $E'(x)>0\Leftrightarrow x>\frac{32}{4+\pi}$ ενώ,

$E'(x)<0\Leftrightarrow x<\frac{32}{4+\pi}$

| | $0$ | $\frac{32}{\pi+4}$ | $8$ |
|---|---|---|---|
| $E'(x)$ | $-$ | $\bullet$ | $+$ |
| $E(x)$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

Άρα, είναι $E$ γνησίως φθινουσα $(0,x_0]$ και $E$ γνησιως αυξουσα $[x_0,8)$ και η $E$ παρουσιάζει ελάχιστο

στο $x_0=\frac{32}{\pi+4}$ το $E\left(\frac{32}{\pi+4}\right)=\frac{1}{16}\left[(\pi+4)\frac{32^2}{(\pi+4)^2}-64\frac{32}{\pi+4}+8\cdot 32\right]=\frac{32}{16\pi}\left(\frac{32}{\pi}-\frac{64}{\pi}+8\right)=\frac{16}{\pi+4}$

Η διάμετρος του κύκλου $\delta = 2R = \dfrac{8 - \dfrac{32}{\pi+4}}{\pi} = \dfrac{8}{\pi+4}$ και η πλευρά του τετραγώνου είναι

$$\alpha = \dfrac{\dfrac{32}{\pi+4}}{4} = \dfrac{8}{\pi+4} = \delta$$

Γ3. Η Ε είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \dfrac{32}{\pi+4}\right]$ άρα

$$E\left(\left(0, \dfrac{32}{\pi+4}\right]\right) = \left[E\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x\to 0^+} E(x)\right) = \left[\dfrac{16}{\pi+4}, \dfrac{16}{\pi}\right)$$

αφού $E\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right) = \dfrac{16}{\pi+4}$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} E(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \dfrac{256}{16\pi} = \dfrac{16}{\pi}$

Η Ε είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{32}{\pi+4}, 8\right)$ άρα

$$E\left(\left[\dfrac{32}{\pi+4}, 8\right)\right) = \left[E\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x\to 8^-} E(x)\right) = \left[\dfrac{16}{\pi+4}, 4\right)$$

αφού $E\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right) = \dfrac{16}{\pi+4}$

Είναι :

$$\lim_{x\to 0^+} E(x) = \lim_{x\to 8^-} \dfrac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \lim_{x\to 8^-} \dfrac{(\pi+4)\cdot 8^2 - 64\cdot 8 + 256}{16\pi} = 4$$

$5 \in E\left(\left(0, \dfrac{32}{\pi+4}\right]\right)$ και Ε γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \dfrac{32}{\pi+4}\right]$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \dfrac{32}{\pi+4}\right]$ ώστε $E(x_0) = 5$

Το $5 \notin E\left(\left(\dfrac{32}{\pi+4}, 0\right]\right)$ άρα δεν υπάρχει $x_1 \in \left(\dfrac{32}{\pi+4}, 0\right]$ ώστε $E(x_1) = 5$

Αρά υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \dfrac{32}{\pi+4}\right]$ ώστε $E(x_0) = 5$

# ΘΕΜΑ Δ

### Δ1.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$\mathrm{f}'(\mathrm{x})=\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{x}-\mathrm{a}}-\mathrm{x}^2\right)'=2\mathrm{e}^{\mathrm{x}-\mathrm{a}}-2\mathrm{x}, \mathrm{x}\in\mathbb{R}$

$\mathrm{f}''(\mathrm{x})=\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{x}-\mathrm{a}}-2\mathrm{x}\right)'=2\mathrm{e}^{\mathrm{x}-\mathrm{a}}-2 \quad \mathrm{x}\in\mathbb{R}$

$\mathrm{f}''(\mathrm{x})=0 \Leftrightarrow 2\mathrm{e}^{\mathrm{x}-\mathrm{a}}-2=0 \Leftrightarrow \mathrm{x}-\mathrm{a}=0 \Leftrightarrow \mathrm{x}=\mathrm{a}$

Από πίνακα καμπυλότητας έχουμε :

| x | - ∞ α + ∞ |
|---|---|
| $\mathrm{f}''(\mathrm{x})$ | – 0 + |
| $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ | Κοίλη σ.κ. Κυρτή |

Η f κοίλη στο $(-\infty, a]$ και κυρτή στο $[a,+\infty)$

Για $x=a \Rightarrow f(a)=2-a^2$ με σημείο καμπής $A\left(2, 2-a^2\right)$

**Δ2**

Η f΄ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=a$

Υπολογίζουμε τα :

$f'\left((-\infty,a]\right) \overset{f' \gamma\nu.\varphi\theta\iota\nu o\upsilon\sigma\alpha}{=} [2-2a,+\infty)$

$f'\left([a,+\infty)\right) \overset{f' \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\alpha\upsilon\xi o\upsilon\sigma\alpha}{=} [2-2a,+\infty)$

Καθώς $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2e^{x-a}-2x\right)=+\infty$

Επειδή η $f'(x)\gamma\nu.\alpha\upsilon\xi o\upsilon\sigma\alpha[a,+\infty)$ θα υπάρχει μοναδικό $x_2\in[a,+\infty)$ : $f'(x_2)=0$

Έχουμε $x_1<a<x_2$

Για $x<x_1<a \overset{f' \gamma\nu\varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}{=} f'(x)>f'(x_1)\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f(x)\gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha(-\infty,x_1]$

$x_1<x<a \Leftrightarrow f'(x_1)>f'(x)\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f(x)\gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha[x_1,\alpha]$

$\alpha<x<x_2 \Leftrightarrow f'(x)<f'(x_2)\Leftrightarrow f'(x)<0$ δηλαδή f γνησίως φθίνουσα $[\alpha, x_2]$

$f\,\gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha[x_1,x_2]$

$\alpha<x_2<x \Leftrightarrow f'(x_2)<f'(x)\Leftrightarrow f'(x)>0$ άρα η f γνησίως αύξουσα $[x_2+\infty)$

Άρα η f παρουσιάζει μοναδικό τοπικό μέγιστο για $x = x_1$

f παρουσιάζει μοναδικό ελάχιστο για $x = x_2$

**Δ3.** Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, x_2]$ με $f(\alpha) = 2 - \alpha^2$ και $f(1) = 2e^{1-\alpha} - 1$

Αρκεί να δείξουμε ότι: $f(a) < f(1) \Leftrightarrow 2 - \alpha^2 < 2e^{1-\alpha} - 1 \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} + \alpha^2 - 3 > 0$

Θεωρούμε $\mathrm{K}(x) = 2e^{1-x} + x^2 - 3, x > 1$

Η συνάρτηση $K(x)$ παραγωγίσιμη με $k'(x) = 2x - 2e^{1-x}$

Είναι: $x > 1 \Leftrightarrow -x < -1 \Leftrightarrow 1 - x < 0 \Leftrightarrow e^{1-x} < 1 \Leftrightarrow -e^{1-x} > -1$

Οπότε $\mathrm{K}'(x) > 0$ για χ>1 άρα η K γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

$\alpha > 1 \Leftrightarrow \mathrm{K}(\alpha) > \mathrm{K}(1) \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} + x^2 - 3 > 0$

Άρα η εξίσωση $f(x) = f(1)$ αδύνατη στο $(a, x_2)$

**Δ4.** Αν α = 2 Τότε έχουμε :

$$f(x) = 2e^{x-2} - x^2, x \in \mathbb{R}$$
$$f'(x) = 2e^{x-2} - 2x, x \in \mathbb{R}$$

Η f παρουσιάζει καμπή στο σημείο Α(2, – 2 ) στο οποίο η εξίσωση της εφαπτομένης είναι :

$y - f(2) = f'(2) \bullet (x-2) \Rightarrow y = -2x + 2$

Η f κυρτή στο $[2, +\infty)$ . Άρα $f(x) \geq y$ ή $f(x) \geq -2x+2$ , $x \geq 2$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 2$

Είναι $\sqrt{x-2} \geq 0$ για κάθε $x \geq 2$ οπότε : $f(x) \cdot \sqrt{x-2} \geq (-2x+2) \cdot \sqrt{x-2}$

$$\int_2^3 f(x) \cdot \sqrt{x-2}\, dx > \int_2^3 (-2x+2) \cdot \sqrt{x-2}\, dx$$

$$I = \int_2^3 (-2x+2) \cdot \sqrt{x-2}\, dx$$

Θέτουμε $y = \sqrt{x-2} \Rightarrow x = y^2 + 2 \Rightarrow dx = 2ydy$

Αν $x = 2$ τότε $y = 0$

Αν $x = 3$ τότε $y = 1$

$$I=\int_0^1\left[-2(y^2+2)+2\right]2y^2\ dy=\int_0^1(-4y^4-4y^2)\ dy=$$

$$=\left[-\frac{4}{5}y^5-\frac{4}{3}y^3\right]_0^1=-\frac{4}{5}-\frac{4}{3}=-\frac{32}{15}$$

Άρα $\int_2^3 f(x)\cdot\sqrt{x-2}\ dx>-\frac{32}{15}$

**Σχολιασμός θεμάτων Μαθηματικών ΟΠ από το Ακαδημαϊκό τμήμα**

Τα θέματα κρίνονται απαιτητικά. Το δεύτερο θέμα είναι σχετικά εύκολο και μάλλον αναμενόμενο. Το τρίτο θέμα είναι γεωμετρικό πρόβλημα το οποίο απαιτούσε γνώσεις προηγούμενων τάξεων και είχε κλιμακούμενη δυσκολία. Τέλος, το τέταρτο θέμα κρίνεται εξαιρετικά δύσκολο.